Uvod:

- n-dimenzionalna geometrija G se sestaja iz n množic $P_0, P_1, \dots P_{n-1}$.

  Elemente množice P_0 imenujemo točke

  P_1 premice

  P_2 ravnine

  ⋮

  Večinoma velja: $P_1, \dots, P_{n-1} \subseteq \mathcal{P}(P_0)$

  Elementa $x \in P_0$ in $p \in P_1$ sta v relaciji, če $x \in p$. Pravimo, da x leži na premici p, p gre skozi x.

  Podobne relacije imamo med ostalimi elementi.

- Če predpišemo aksiome, katerim morajo zadoščati zgornje relacije, dobimo razne geometrije kot so afina, projektivna, ...

- Transformacija $\tau: G \to G'$ med dvema n-razsežnima geometrijama se sestaja iz n bijekcij $P_i \to P_i'$, ki so usklajene z relacijami: $x \in p \Rightarrow \tau(x) \in \tau(p)$.

  V konkretnih geometrijah podamo pogoj na transformacije.

  Npr: v evklidski geometriji zahtevamo, da transformacije ohranjajo pravi kot.

  Felix Klein: geometrija je preučevanj invariant, ki se ohranjajo s transformacijami

- Zakaj neevklidska geometrija?

  En od aksiomov evklidske ravnine pravi, da za vsako točko x in premico p obstaja natanko ena premica q: $x \in q$ in $p \parallel q$.

  Okoli 1830 sta dva neodvisno odkrila geometrijo razsežnosti 2, ki zadošča vsem aksiomom evklidske ravnine, razen zgornjem o vzporednosti.

- Če želimo na monitorju realistično prikazati 3D telesa, moramo uporabiti evklidsko geometrijo. Pri premikm 3D delca se spreminjajo koti in razdalje

- Evklidska ravnina je asimetična, saj se dve premici skladata ali pa sta vzporedni, imamo pa 3 tipe stožnic.

Afina geometrija

Afini podprostori v vektorskih prostorih

Naj bo O obseg, V pa končno-razsežen vektorski prostor nad O.

Definicija: Naj bo $a \in V$ in $W \leq V$. Množico $a+W = \{w+a \mid w \in W\}$ imenujemo afin podprostor prostora V.

Definicija: Množica A je afin prostor, če je afin podprostor kakega vektorskega prostora

Lema: Naj bo $A = a+W$ afin prostor. Tedaj je $A = b+W$ $\forall b \in A$.

Dokaz: $b \in A \Rightarrow b = a+w$ za nek $w \in W$

$b+W = a+w+W = a+W = A$ ∎

Posledica: Naj bosta $A = a+W$ in $B = b+U$ afina podprostora v V. Če je $A \subseteq B$, je $W \subseteq U$.

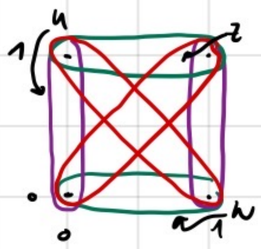
Dokaz: $a \in A \Rightarrow a \in b \Rightarrow$ po lemi: $B = a+U \Rightarrow a+W \subseteq a+U \Rightarrow W \subseteq U$.

Posledica: Naj bo $A = a+W = a'+W'$ afin prostor. Tedaj je $W = W'$

Definicija: Razsežnost afinega prostora $A = a+W$ je enaka $\dim W$.

Primer: $O = \mathbb{Z}_2$

$V = \mathbb{Z}_2^2$, poišči vse afine premice:



Skupaj imamo 6 afinih premic

Vse dvoelementne množice so premice.

Definicija: Vsoto $\sum_{}^{n} \alpha_i a_i$; $\alpha_i \in O$ in $a_i \in A$ in $\sum_{}^{n} \alpha_i = 1$ imenujemo afina kombinacija elementov iz A.

Trditev: Naj bo $k(O) \neq 2$ $(O \neq \mathbb{Z}_2)$. $A \subseteq V$ je afin podprostor $\Leftrightarrow$ poljubna afina kombinacija dveh elementov iz A je v A.

Opomba: Trditev ne velja če $2=0$: $O = \mathbb{Z}_2$, $V = \mathbb{Z}_2^2$: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1 \Rightarrow$ afina kombinacija $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = a_1$ ali a_2,
$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 0$

toda 3 elementne množice v V vedno so poravnane, ampak je afina kombinacija dveh elementov iz te množice spet v množici vendar 3 elementne množica ni afin podprostor.

Lema: $k(O) \neq 2$, $A \subseteq V$. Poljubna afina kombinacija dveh elementov iz A je v $A \Leftrightarrow$ poljubna afina kombinacija elemente iz A je v A.

Dokaz: $\Leftarrow$ očitno

$\Rightarrow$ z indukcijo na število elementov v afini kombinaciji.

baza: $n=3$: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$

Če $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \Rightarrow 1+1+1=1 \Rightarrow 2=0$, kar ni možno.

BSS: $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = (\alpha_1 + \alpha_2)\Big(\underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}(\alpha_1 a_1) + (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}(\alpha_2 a_2)}_{a'}\Big) + \alpha_3 a_3$$

a' je afina kombinacija dveh elemnt iz $A \Rightarrow$ je v A.

$\Rightarrow a = (\alpha_1 + \alpha_2) a' + \alpha_3 a_3$ je afina kombinacija dveh elementov iz $A \Rightarrow$ vsota $a \in A$.

korak: $n \to n+1$: Če $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \neq 0$, je $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})\Big(\underbrace{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})^{-1}\alpha_1 a_1 + \ldots + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})\alpha_{n-1} a_{n-1}}_{a'}\Big) + a_n a_n$

$\Rightarrow a' \in A \Rightarrow a \in A$. ✓

Če $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} = 0$ je $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2} \neq 0$ (sicer je $\alpha_{n-2} = 0$ in imamo afino kombinacijo $n-1$ elementov),

tudi $n-2 \geq 2$: $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2})\Big(\underbrace{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2})^{-1}\alpha_1 a_1 + \ldots + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2})^{-1}\alpha_{n-2} a_{n-2}}_{a' \in A}\Big) + \alpha_{n-1} a_{n-1} + a_n a_n$

$\Rightarrow a = a' + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \alpha_n a_n$ tudi $\in A$ po I.P.

Dokaz trditve: $\Rightarrow$: $A = a + W$ je afin podprostor. $a + w_1, a + w_2 \in A$, $\alpha_1, \alpha_2 \in O$ in $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

$\alpha_1(a + w_1) + \alpha_2(a + w_2) = \alpha_1 a + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_2 a = (\alpha_1 + \alpha_2)a + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = a + \underbrace{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}_{\hat{w}} \in a + W$.

$\Leftarrow$: $a \in A$ poljuben in definiramo $W = \{x - a \mid x \in A\}$

$\Rightarrow A = a + W$. Dokažimo, da je W vektorski podprostor:

$x - a, y - a \in W$, $\alpha_1, \alpha_2 \in O$:

$\alpha_1(x-a) + \alpha_2(y-a) \in W \Leftrightarrow$ $\overbrace{\alpha_1(x-a) + \alpha_2(y-a) + a}^{\text{afina kombinacija el. iz } A \Rightarrow \in A} \in A$.

$\Leftrightarrow -(\alpha_1 + \alpha_2)a + \alpha_1 x + \alpha_2 y - a \in A$

$\Leftrightarrow \alpha_1 x + \alpha_2 y \in A$ ✓ po predpostavki

Posledica: $A \subseteq V$ je afin podprostor $\Leftrightarrow$ poljubna afina kombinacija elementov iz A je v A.

Trditev: Če je presek $\mathcal{P}$ neke družine afinih podprostorov neprazen, je $\mathcal{P}$ afin podprostor.

Dokaz: $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ družina afinih podprostorov.

$\exists a \in \bigcap_\lambda A_\lambda \Rightarrow A_\lambda = a + W_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$

$\bigcap_\lambda A_\lambda = a + \underbrace{\bigcap_\lambda W_\lambda}_{\text{je v. pod.}} \Rightarrow \mathcal{P}$ je afin podprostor.

Definicija: Afina ogrinjača $X \subseteq V$ je presek vseh afinih podprostorov, ki vsebujejo X.
Označimo z $Af(X)$. Po trditvi je afin podprostor.

Trditev: $Af(X)$ je enaka množici vseh afinih kombinacij oseh elementov iz X.

Dokaz: A naj bo množica vseh afinih kombinacij.

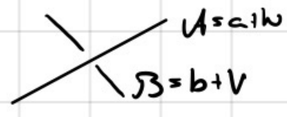
$A \subseteq Af(X)$: Vsak $\sum_{i}^{n} \alpha_i x_i \in A$ je v $Af(X)$, saj je $Af(X)$ afin podprostor in $x_i \in Af(X)$.

$Af(X) \subseteq A$: $x \in X$. $\Rightarrow 1 \cdot x$ je afina kombinacija, zato $x \in A$.

$\Rightarrow X \subseteq A$.

Ker je $Af(X)$ najmanjši afin podprostor, ki vsebuje X, je dovolj pokazati, da je A afin podprostor.

Pokazati moramo, da je poljubna afina kombinacija elementov iz $A \cup A$, spet velja, saj je afina kombinacija afinih kombinacij spet afina kombinacija. ■

Afini prostori se ne sekajo vedno: 

$Af(A \cup B)$ je razsežnosti 3.

Lema: Naj bosta $A = a + W$ in $B = b + U$ afina podprostora v V. Tedaj je $A \cap B \neq \emptyset \iff b - a \in W + U$

Dokaz: $\Rightarrow$: $\exists w \in W$ in $u \in U$, da je $a + w = b + u \Rightarrow b - a = w - u \in W + U$.

$\Leftarrow$: $\exists w \in W$ in $u \in U$, da je $b - a = w + u$. $\Rightarrow a + w = b - u \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

Lema: $Af\left((a+W) \cup (b+U)\right) = a + \left(W + U + Lin\{b-a\}\right)$

Dokaz: $T := W + U + Lin\{b-a\}$

$a + b - a = b \in T \Rightarrow a + T = b + T$

$(\subseteq)$: $a + W \subseteq a + T$

$b + U \subseteq b + T = a + T \Rightarrow Af\left((a+W) \cup (b+U)\right) \subseteq a + T$

$(\supseteq)$: Naj bo C afin prostor, ki vsebuje $(a+W) \cup (b+U)$. Dokazujemo, da je $a + T \subseteq C$.

$a, b \in C \Rightarrow C = a + S = b + S$ za neki vektorski podprostor S.

$a + W \subseteq C \Rightarrow a + W \subseteq a + S \Rightarrow W \subseteq S$

$b + U \subseteq C \Rightarrow b + U \subseteq b + S \Rightarrow U \subseteq S$

$a, b \in C \Rightarrow b = a + s$ za $s \in S$

$\Rightarrow b - a = s \in S \Rightarrow Lin\{b-a\} \subseteq S$.

$\Rightarrow T \subseteq S \Rightarrow a + T \subseteq C$. ■

Trditev: Naj bosta $A = a + W$ in $B = b + U$ afina podprostora v V. Tedaj je $\dim\left(Af(A \cup B)\right) = \dim(W + U) \iff A \cap B \neq \emptyset$.
(če $\cap = \emptyset$, dodamo še $Lin\{b-a\}$)

Dokaz: $A \cap B \neq \emptyset \overset{lem}{\iff} b - a \in W + U \iff W + U = W + U + Lin\{b-a\} \overset{lem}{\iff} \dim\left(Af(A \cup B)\right) = \dim(W + U)$. ■

Definicija: Afina prostora $A = a + W$ in $B = b + U$ sta vzporedna, če je $W \subseteq U$ ali $U \subseteq W$.
Pišemo $A \parallel B$.

Izrek:
a) Če je $A \cap B \neq \emptyset$, je $A \parallel B \iff A \subseteq B$ ali $B \subseteq A$.
b) Če je $A \cap B = \emptyset$, je $A \parallel B \iff \dim\left(Af(A \cup B)\right) = \max\{\dim(A), \dim(B)\} + 1$.

Dokaz:
a) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists c \in A \cap B: A = c + W,\ B = c + U$.
$A \parallel B \overset{def.}{\iff} W \subseteq U$ ali $U \subseteq W$
$\iff A = c + W \subseteq c + U = B$ ali $B = c + U \subseteq c + W = A$

b) $A \cap B = \emptyset$. $A \parallel B \overset{def.}{\iff} W \subseteq U$ ali $U \subseteq W$
$\iff W + U = U$ ali $W + U = W$
$\iff \dim(W + U) = \max\{\dim(U), \dim(W)\}$
$\overset{A \cap B = \emptyset}{\iff} \dim\left(Af(A \cup B)\right) = \dim(W + U + Lin\{b-a\}) = \dim(W + U) + 1 = \max\{\dim W, \dim U\} + 1$. ■

Definicija: Množica $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$ je afino neodvisna, če je množica $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_n - x_0\}$ linearno neodvisna.
Množica X je afina baza afinega podprostora A, če je afina neodvisna in $Af(X) = A$.

Izrek: Naj bo $\mathcal{A} = a + W$ afin podprostor.

a) $\{a_0, \dots, a_n\}$ je afina baza za $\mathcal{A} \Leftrightarrow \{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ baza za W.

b) $\{x_1, \dots, x_n\}$ je baza za $W \Leftrightarrow \{a, a + x_1, \dots, a + x_n\}$ je afina baza.

Posledica: Vsako afino neodvisno množico afinega podprostora $\mathcal{A}$ lahko dopolnimo do afine baze.

Semilinearne preslikave

Definicija: U, V naj bosta vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$. Preslikava $A: U \to V$ je semilinearna, če je:

- aditivna: $A(x+y) = Ax + Ay \quad \forall x, y \in U$.
- semihomogena: obstaja avtomorfizem f obsega $\mathcal{O}$, da je $A(\alpha x) = f(\alpha) A(x) \quad \forall x \in U, \alpha \in \mathcal{O}$.

Primer: $\mathcal{O} = \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ je avtomorfizem obsega $\mathbb{C}$.

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ linearna preslikava.

$B: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ s predpisom: $B(x) = A(\bar{x}) = A(f(x))$

Aditivnost: $B(x+y) = A(\overline{x+y}) = A(\bar{x} + \bar{y}) = A(\bar{x}) + A(\bar{y}) = B(x) + B(y)$.

Semihomogenost: $B(\alpha x) = A(\overline{\alpha x}) = \bar{\alpha} A(\bar{x}) = \bar{\alpha} B(x) = f(\alpha) B(x)$.

$\Big\}$ B je semilinearna.

Opomba:
- Grupa avtomorfizmov obsega $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$ je trivialna grupa. $\Rightarrow$ Vsaka semilinearna je linearna.
- Vsaka semilinearna preslikava je natanko določena z avtomorfizmom f in slikami baznih vektorjev.

Trditev: Naj bo $A: U \to V$ semilinearna preslikava.

a) Če je $W \leq U$, je $A(W) \leq V$

b) Če je $W \leq V$, je $A^{-1}(W) \leq U$.

Dokaz: Naj bo f avtomorfizem, ki pripada preslikavi A.

a) $Ax, Ay \in AW$, $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$.

$\alpha Ax + \beta Ay = A(f^{-1}(\alpha)x) + A(f^{-1}(\beta)y) = A(\underbrace{f^{-1}(\alpha)x + f^{-1}(\beta)y}_{\in W}) \in AW$.

b) $x, y \in A^{-1}W$, $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$

$\Rightarrow Ax, Ay \in W \Rightarrow \underbrace{f(\alpha)Ax + f(\beta)Ay}_{\in W} = A(\alpha x + \beta y) \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A^{-1}W$. ■

Posledica: Zaloga vrednosti in jedro semilinearne preslikave sta vektorska podprostora.

Trditev: Injektivna semilinearna preslikava preslika linearno neodvisne vektorje v lin. neodvisne vektorje.

Dokaz: $x_1, \dots, x_n$ lin. neodvisni.

Naj bo $\alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_n Ax_n = 0$.

$\Rightarrow A(f^{-1}(\alpha_1)x_1 + \dots + f^{-1}(\alpha_n)x_n) = 0$

$\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha_1)x_1 + \dots + f^{-1}(\alpha_n)x_n = 0$

$\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha_1) = \dots = f^{-1}(\alpha_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$

$\Rightarrow Ax_1, \dots, Ax_n$ so lin. neodvisni.

Trditev: a) Kompozitum semilinearnih preslikav je semilinearen

b) Inverz bijektivne semilinearne preslikave, je semilinearen.

Dokaz: a) Naj bo $A: U \to W$ semilinearna, ki pripada avtomorfizmu f in $B: W \to V$ semilinearna, ki pripada avtomorfizmu g.

$B \circ A$ je semilinearna:

i) Aditivnost: $(B \circ A)(x+y) = B(Ax + Ay) = B(Ax) + B(Ay)$ ✓

ii) Semihomogenost: $(B \circ A)(\alpha x) = B(f(\alpha)Ax) = g(f(\alpha))\, B(Ax)$ ✓

$\Rightarrow$ je semilinearna, ki pripada avtomorfizmu $g \cdot f$.

b) Naj bo $A: U \to W$ bijektivna semilinearna preslikava, ki pripada avtomorfizmu f.

$x, y \in W$ in $x' = A^{-1}x$, $y' = A^{-1}y$.

i) $A(x' + y') = Ax' + Ay' = x + y \Rightarrow A^{-1}(x+y) = x' + y' = A^{-1}x + A^{-1}y$ ✓

$\Rightarrow A(f^{-1}(\alpha)x') = \alpha A x' = \alpha x \Rightarrow A^{-1}(\alpha x) = f^{-1}(\alpha)x' = f^{-1}(\alpha)A^{-1}x.$

$\Rightarrow A^{-1}$ je semilinearna, ki ji pripada avtomorfizem f^{-1}.

Opomba: Vsota semilinearnih preslikav v splošnem ni semilinearna.

Posledica: Množica vseh obrnljivih semilinearnih preslikav $V \to V$ je grupa za kompozitum.

Afine transformacije

Definicija: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ afina podprostora v vektorskem prostoru V, $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$. Bijekcija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afina preslikava, če kolinearne točke slika v kolinearne.

Izrek: Slika premice z afino transformacijo je premica.

Opomba: Iz definicije sledi, da je slika premice vzporedna v kaki premici. Če je $\mathcal{O}$ končen obseg, je slika premice cela premica.

Lema: Naj bo $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afina podprostora v vektorskem prostoru V nad $\mathcal{O}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ in $c \in Af(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$. Potem obstajata $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, da $c \in Af(\{a,b\})$.

Opomba: 1) Če je $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_2$, lema ne velja: $V = \mathbb{Z}_2^2$



$Af(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = V$

V nobenem primeru ne dosežemo $c \in Af(\{a,b\})$.

2) Če je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, lema ne velja:

$\mathcal{O} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}$ = x-os, $\mathcal{B}$ = točka



$\forall a \in \mathcal{A}$, premica skozi a in $\mathcal{B}$ seka $\mathcal{B}$, ne pri c.

Dokaz: $\{x_0, \dots, x_k\}$ naj bo afina baza za $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. $k \geq 0$.

$\{x_0, \dots, x_k, a_1, \dots, a_n\}$ afina baza za $\mathcal{A}$

$\{x_0, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m\}$ afina baza za $\mathcal{B}$.

$c \in Af(\{a,b\}) \Rightarrow c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j + \sum_{l=1}^{k} \gamma_l x_l, \quad \sum_{1}^{n} \alpha_i + \sum_{1}^{m} \beta_j + \sum_{0}^{k} \gamma_l = 1$

1.) $\alpha := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ in $\beta := \sum_{1}^{m} \beta_j + \sum_{0}^{k} \gamma_l \neq 0$

$\Rightarrow c = \underbrace{\alpha \sum_{1}^{n} \alpha^{-1}\alpha_i a_i}_{a \in \mathcal{A}} + \underbrace{\beta\left(\sum_{j=m}^{m} \beta^{-1}\beta_j b_j + \sum_{l=0}^{k} \beta^{-1}\gamma_l x_l\right)}_{b \in \mathcal{B}} \Rightarrow c \in Af(\{a,b\})$

2.) $\alpha = 0$ $(\Rightarrow \beta = 1)$ ali $\beta = 0$ $(\Rightarrow \alpha = 1)$: obstaja $\gamma \in \mathcal{O} \setminus \{0,1\}$

$c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \gamma x_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j + \sum_{l=0}^{k} \gamma_l x_l - \gamma x_0$

Smo v primeru 1 in znamo končati. ∎

Lema: Naj bo $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ afina transformacija in naj obstaja afina premica $p \subseteq \mathcal{A}$ in afina premica $q \subseteq \mathcal{B}$, da $\tau(p) \subseteq q$. Potem v $\mathcal{A}$ obstajajo afini podprostori $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, da velja:

1.) $p \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_3 \dots \subseteq \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$. ↳ obseg je neskončen $(p = \mathcal{A}_1)$

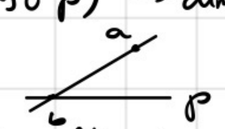
2.) $\dim \mathcal{A}_i = i \quad \forall i$

3.) $\dim Af(\tau(\mathcal{A}_i)) < i, \quad i = 2, \dots$

Dokaz: τ surjektivna $\Rightarrow \exists a \in \mathcal{A} \setminus p: \tau(a) \in q$

$\mathcal{A}_2 = Af(\{a\} \cup p) \overset{\text{lema}}{\Rightarrow} \dim \mathcal{A}_2 = 2.$

$\tau(\mathcal{A}_2) \subseteq q$.



Naj bo $b \in p$ poljuben in r premica skozi a in b.

$\Rightarrow Af(\{a\} \cup p) \subseteq Af(r \cup p)$

↳ $\dim = 2$ po lemi

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}_2 = Af(r \cup p)$. Naj bo $x \in \mathcal{A}_2$. Po lemi obstajata $y \in r$ in $z \in p$, da $x \in Af(\{y,z\})$. Ker je τ afina, je $\tau(r) \subseteq \mathcal{Q}$, zato $\tau(y), \tau(z) \in \mathcal{Q}$.

Torej $\tau(Af(\{y,z\})) \subseteq \mathcal{Q}$.

$\Rightarrow$ $\tau(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{Q}$.

$\Rightarrow$ $\dim Af(\tau(\mathcal{A}_2)) = 1$

Denimo, da smo že konstruirali $\mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{i-1}$.

Naj bo $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{i-1}$ in $\mathcal{A}_i = Af(\mathcal{A}_{i-1} \cup \{a\})$.

Po lemi je $\dim \mathcal{A}_i - \dim \mathcal{A}_{i-1} + 1 = i$

Izberemo $b \in \mathcal{A}_{i-1}$ in definiramo premico $r := Af(\{a,b\})$.

Kot prej pokažemo, da je $\mathcal{A}_i = Af(\mathcal{A}_{i-1} \cup r)$.

Torej je $\tau(\mathcal{A}_i) \subseteq Af(\tau(\mathcal{A}_{i-1}) \cup \tau(r))$.

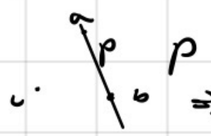
$= Af(\underbrace{Af(\tau(\mathcal{A}_{i-1}))}_{\dim < i-1 \text{ po I.P.}} \cup \underbrace{Af(\tau(r))}_{\dim = 1})$

Ker je afina prostora sekata, je $\dim Af(\mathcal{A}_i) \leq \dim Af(\tau(\mathcal{A}_{i-1})) + \dim Af(\tau(r)) < i+1-1 = \underline{\underline{i}}$. ■

Dokaz izreka: Če $\tau(p) \subsetneq \mathcal{Q}$, je $\dim \mathcal{A} \leq \dim \mathcal{A}_n > \dim Af(\tau(\mathcal{A}_n)) \Rightarrow \tau$ ni surjektivna

Posledica izreka: Afina transformacija preslika nekolinearne točke v nekolinearne.

Dokaz: Naj bodo a,b,c nekolinearne točke.



p skozi a in b ne vsebuje točke c.

$\Rightarrow$ $\tau(c) \notin \tau(p)$, saj je τ injektivna

$\Rightarrow$ premica skozi $\tau(a), \tau(b)$ ne vsebuje $\tau(c)$.

Posledica izreka: Množica vseh afinih transformacij $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je grupa za kompozitum.

Dokaz: Kompozitum afinih transformacij je jasno tudi afina transformacija. Pokažimo, da je τ^{-1} afina transformacija.

Recimo, da imamo a,b,c kolinearne, toda $\tau^{-1}(a), \tau^{-1}(b), \tau^{-1}(c)$ pa niso.

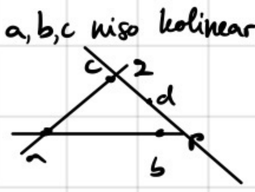
$\Rightarrow$ $\tau(\tau^{-1}(a)), \tau(\tau^{-1}(b)), \tau(\tau^{-1}(c))$ so nekolinearne $\lightning$, inverz je afina transformacija.

Lema: Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afina podprostora v V nad $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}_2$. Afina transformacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preslika koplanarne točke v koplanarne točke.

Dokaz: a,b,c,d naj bodo koplanarne.

i) a,b,c so kolinearne $\Rightarrow$ $\tau(a), \tau(b), \tau(c)$ so kolinearne $\Rightarrow$ $\tau(a), \tau(b), \tau(c), \tau(d)$ so koplanarne.

ii) a,b,c niso kolinearne $\Rightarrow$ premici $p = Af(\{a,b\})$, $q = Af(\{a,c\})$ sta različni, zato je $Af(p \cup q)$ ravnina. Po lemi obstajata $x \in p$, $y \in q$, da je $d \in Af(\{x,y\})$. Točka $\tau(d)$ leži na premici skozi $\tau(x), \tau(y)$, ta pa leži na ravnini $\tau(a), \tau(b), \tau(c)$.



Lema: Naj bosta $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ afina podprostora v V nad $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}_2$. Afina transformacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preslika vzporedni premici v vzporedni premici

Dokaz: $p \parallel q$ v $\mathcal{A}$. $\dim Af(p \cup q) = 2 \Rightarrow \dim \tau(Af(p \cup q)) = 2$

$p, q \subseteq Af(p \cup q) \Rightarrow \tau(p), \tau(q) \subseteq \tau(Af(p \cup q)) \Rightarrow Af(\tau(p) \cup \tau(q)) \subseteq \tau(Af(p \cup q))$

$\tau(p), \tau(q)$ sta afini premici, ki se ne sekata. $\Rightarrow \dim Af(\tau(p) \cup \tau(q)) = 2$, če sta premici vzporedni in 3 sicer.

Toda 3 ne more biti, ker je $2 \Rightarrow \tau(p) \parallel \tau(q)$.

Izrek (Osnovni izrek afine geometrije): Naj bosta $\mathcal{A} = a + U$, $\mathcal{B} = b + W$ afina podprostora v V nad $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}_2$ in $\dim \mathcal{A} + \dim \mathcal{B} \geq 2$. Preslikava $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afina transformacija $\Leftrightarrow$ obstajata $c \in \mathcal{B}$ in $A: U \to W$ bijektivna semilinearna preslikava, da je $\tau(X) = A(x-a) + c$.

Dokaz: $\Leftarrow$: A bijekcija $\Rightarrow$ τ bijekcija.

$x + X \subseteq \mathcal{A}$ afina premica $\Rightarrow$ $\tau(x+X) = A(x-a+X) + c$

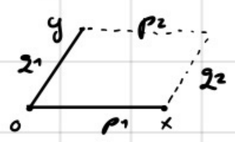
$\Rightarrow A(x-a)+c+A(X)$

$A(X)$ je linearen podprostor v $W \Rightarrow \tau(x+X)$ je afina premica.

$\Rightarrow$ Definiramo $A: U \to W$, $A(u) = \tau(u+a) - \tau(a)$

Tak A je kompozitum treh afinih transformacij, zato je afina transformacija

A je aditivna: $x, y \in U$, linearno neodvisna



$X := Lin\{x\} = p_1$, $p_2 = X+y$

$Y := Lin\{y\} = q_1$, $q_2 = Y+x$

Premici p_2 in q_2 se sekata v $x+y$. $\Rightarrow A(x+y) \in A(p_2) \cap A(q_2)$

Ker $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}_2$, A slika vzporedne premice v vzporedne.

$\Rightarrow A(p_1) \parallel A(p_2) = Ay + Ap_1 \ni Ay + Ax$

$\Rightarrow A_{q_1} \parallel A_{q_2} = Ax + Ap_2 \ni Ax + Ay$

$\Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay$.

Če sta $x, y \in U$, lin. odvisna:

Ker $\dim U \geq 2$, obstaja $z \in U$, da je lin. neodvisen z x in y:

$A(x+y) + Az = A(x+y+z) = A(x) + A(y+z) = Ax + Ay + Az$

$A(x+y) = A(x) + Ay$.

A je semihomogena: $x \in U$, neničelen $\Rightarrow A: Lin\{x\} \to Lin\{Ax\}$ je bijekcija.

$A(\alpha x) = f_x(\alpha) Ax$, kjer je $f_x: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$

·) f_x je neodvisna preslikava od x: $x, y \in U$, linearno neodvisna

$f_x(\alpha)Ax + f_y(\alpha)Ay = A(\alpha x) + A(\alpha y) = A(\alpha(x+y)) = f_{x+y}(\alpha) A(x+y)$

$= f_{x+y}(x)\left(Ax + Ay\right)$

Ker sta Ax, Ay lin. neodvisna, je $f_x(\alpha) = f_{x+y}(\alpha) = f_y(\alpha)$ $\forall \alpha$.

x, y lin. odvisna izberemo z, ki je lin. neodvisen od x in $y \Rightarrow f_x = f_z = f_y$.

Označimo $f = f_x$ za poljubno $x \in U$, $x \neq 0$.

·) f je avtomorfizem obsega $\mathcal{O}$. i) $f(\alpha+\beta)Ax = A((\alpha+\beta)x) = A\alpha x + A\beta x = f(\alpha)Ax + f(\beta)Ax$

$\Rightarrow f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$.

ii) $f(\alpha\beta)Ax = A(\alpha\beta x) = f(\alpha)f(\beta)Ax \Rightarrow f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$. ■

Izrek: Naj bosta $\mathcal{A} = a+U$ in $\mathcal{B} = b+W$ afina podprostora, $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$.

Preslikava $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afina transformacija, ki ohrani vzporednost (ali $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}_2$) $\Leftrightarrow$ obstajata

$c \in \mathcal{B}$ in $A: U \to W$ bijektivna semilinearna preslikava, da je $\tau(x) = A(x-a) + c$.

Definicija: Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afini premici v V. Afina transformacija je preslikava $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ oblike $\tau(x) = A(x-a)+c$.

Definicija: Afina transformacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je dilatacija, če za vsak afin podprostor $X \subseteq \mathcal{A}$ velja, da je $X \parallel \tau(X)$.

npr raztег

Trditev: Vsaka dilatacija ohranja vzporednost.

Dokaz: $X \parallel Y \vee A \subset \mathcal{A}$. $X \parallel \tau(X)$ $Y \parallel \tau(Y) \Rightarrow \tau(X) \parallel \tau(Y)$.

Izrek: Naj bo $\mathcal{A} = a+U$ afin prostor. Preslikava $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je dilatacija $\Leftrightarrow$

obstajata $c \in \mathcal{A}$ in $\lambda \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$, da je $\tau(x) = \lambda(x-a) + c \sim \lambda x + c'$

Dokaz: Vsaka dilatacija ohranja vzporednost po osnovnem izreku o afini geometriji lahko zapišemo

$\tau(x) = A(x-a)+c$, A bijektivna semilinearna.

Naj bo $u \in U \setminus \{0\}$ in p_u premica skozi a in $a+u$.

$\tau(p_u)$ je premica, ki gre skozi $\tau(a) = A(0)+c \Rightarrow \tau(a) = c$

$\tau(a+u) = A(u)+c$

Ker je τ dilatacija, je $p_u \parallel \tau(p_u)$

Torej sta smerna vektorja premic p in $\tau(p)$ lin. odvisna.

Zato $Au = \lambda_u u$. $\lambda_u \neq 0$, saj sicer u bijektivna. Pokažimo, da je λ_u neodvisen od u.

u, v lin. neodvisna: $\lambda_u u + \lambda_v v = Au + Av = A(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = \lambda_{u+v} u + \lambda_{u+v} v$

$\Rightarrow \lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$.

u, v lin. odvisna: Izberemo w, da je lin. neodvisen z u in v. $\lambda_u = \lambda_w = \lambda_v$. ■

Definicija: Dilatacija $\tau: A \to A$ je translacija, če je $\tau = id_A$ ali τ nima negibnih točk.

Izrek: Dilatacija $\tau: A \to A$ je translacija $\Leftrightarrow$ obstaja $c \in A$, da je $\tau(x) = x + c$.

Dokaz: τ dilatacija $\Rightarrow \tau(x) = \lambda(x-a) + c$.

Denimo, da ima τ negibno točko. $x = \tau(x) = \lambda(x-a) + c$

$(\lambda - 1)x = \lambda a - c$

- $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ τ ima negibno točko, ni identiteta $\Rightarrow$ τ ni translacija.
- $\lambda = 1 \Rightarrow a = c \Rightarrow \tau(x) = x - a + a = x \Rightarrow$ je identiteta.

Obrat je jasen ■

Aksiomatsko definirana afina ravnina

Definicija: Adar A je par množic (A_0, A_1). Elemente prve imenujemo točke, druge pa premice.

Med množicama A_0 in A_1 obstaja incidenčna relacija: $x \in A_0$, $p \in A_1$: x v relaciji s p, potem pravimo p skozi x, x leži na p.

Premici $p, q \in A_1$ sta vzporedni, če $p \cap q = \emptyset$ ali $p = q$. Pišemo $p \parallel q$.

Relacija zadošča aksiomom: A1: skozi različni točki poteka natanko ena premica

A2: za dani $p \in A_1$ in $P \in A_0$ obstaja natanko ena premica q, da je $p \parallel q$ in q gre skozi P.

A3: Obstajajo vsaj 3 točke, ki ne ležijo na skupni premici.

Zgled: Vsi afini podprostori v $\mathbb{R}^n$ razsežnosti 2 so aksiomatsko definirane afine ravnine

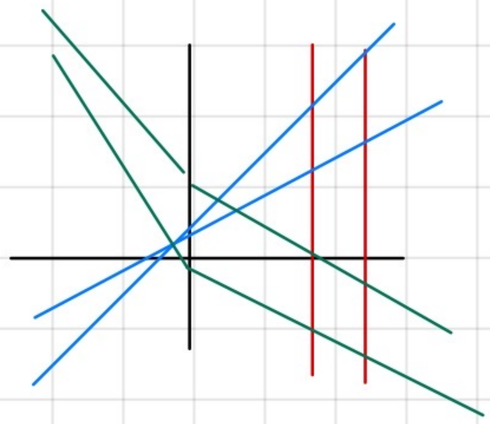
Zgled: Afini podprostori v $\mathbb{R}^n$ razsežnosti 3 niso aksiomatsko definirane afine ravnine

Ne zadoščajo A2, saj je definicija vzporednosti v adar ne vjema s "pravo" vzporednostjo.

Zgled: Moultonova ravnina: $A_0 = \mathbb{R}^2$

A_1: - p_b je navpična premica $x = b$; $b \in \mathbb{R}$

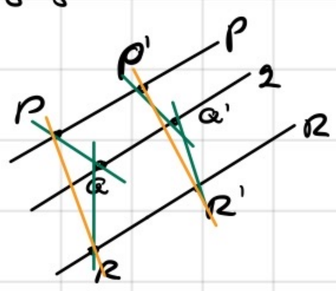
- $p_{a,b}$: $y = ax + b$, $a \in [0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$
- $p_{a,b}$: $y = \begin{cases} ax + b; & x \geq 0 \\ 2ax + b; & x < 0 \end{cases}$, $a \in (-\infty, 0)$, $b \in \mathbb{R}$



Izrek: V afinih ravninah, ki so podmnožice vektorskih prostorov veljata dva Desarguesova izreka.

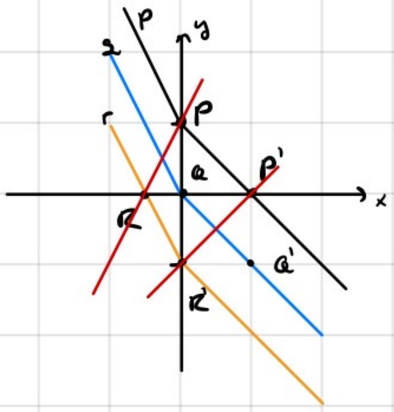
i) Naj bodo p, q, r paroma različne vzporedne premice, $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$ in $R, R' \in r$ taki, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$.

Tedaj je $PR \parallel P'R'$.



Moultonova ravnina ne zadošča 1. Desarguesovemu izreku:

p: $y = \begin{cases} -x+1; & x \geq 0 \\ -2x+1; & x < 0 \end{cases}$ q: $y = \begin{cases} -x; & x \geq 0 \\ -2x; & x < 0 \end{cases}$ r: $y = \begin{cases} -x-1; & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$



$P(0,1)\quad P'(1,0)$

$Q(0,0)\quad Q'(1,-1)$

$R(-\frac{1}{2},0)\quad R'(0,-1)$

$PR:\ y=2x+1$

$P'R':\ y=x-1$

$\Big\} \Rightarrow$ Nista vzporedni!

Definicija: Afina transformacija med a.d.a.r $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_0,\mathcal{A}_1)$ in $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)$ je bijekcija $\tau:\mathcal{A}_0\to\mathcal{B}_0$, ki kolinearne slika v kolinearne.

Afina transformacija $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ je dilatacija, če za vsako premico $p:\ \tau(p)\parallel p$.

Translacija je dilatacija, ki je $id_{\mathcal{A}_0}$ ali pa nima negibnih točk.

Opomba: Če je $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ afina transformacija in velja I. Desarguesov izrek, velja tudi za $\mathcal{B}$.

Torej ne obstaja obseg $\mathcal{O}$ in afina transformacija iz Moultonove ravnine v $\mathcal{O}^2$.

Pri Desarguesov izrek je ekvivalenten sledečemu aksiomu:

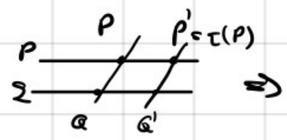
Ah): Za poljubni točki $Q,Q'\in\mathcal{A}_0$, obstaja translacija $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, da je $\tau(Q)=Q'$.

Pokažemo ekvivalenco: $Ah\Rightarrow$ I.D.I: Naj bodo p,q,r različne vzporedne premice. $P,P'\in p$, $Q,Q'\in q$, $R,R'\in r$, da je

$PQ\parallel P'Q'$ in $QR\parallel Q'R'$.

Po Ah obstaja $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, da je $\tau(P)=P'$.

- $\tau(p)\parallel p$
- $P'=\tau(P)\in p\cap\tau(p)\Rightarrow\tau(p)=p$
- $P'=\tau(P)\in\tau(PQ)=\tau(P)\tau(Q)$



$\Rightarrow\tau(PQ)=\tau(P)\tau(Q)$

Denimo, da $\tau(Q)\neq Q'\Rightarrow\tau(Q)\in q$.

$\Rightarrow Q\,\tau(Q)\neq QQ'=q\Rightarrow Q\,\tau(Q)\parallel p$.

Naj bo $X=Q\,\tau(Q)\cap p$.

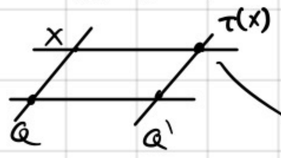
Ker je $\tau(p)=p$, je $\tau(X)\in p$

Ker je $Q\,\tau(Q)\parallel\tau(Q)\,\tau^2(Q)$ je $Q\tau(Q)=\tau(Q\tau(Q))$ in zato $\tau(X)=Q\tau(X)\Rightarrow\tau(X)\in p\cap Q\tau(Q)\Rightarrow\tau(X)=X$. $\lightning$

$\Rightarrow$ ker τ nima negibnih točk, smo v protislovju, zato je $\tau(Q)=Q'$

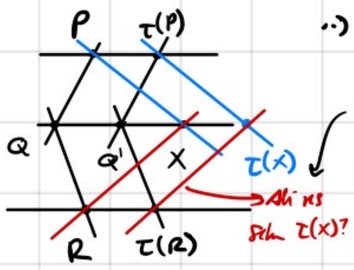
Enako sklepamo, da je $\tau(R)=R'$. Torej je $PR\parallel\tau(PR)=\tau(P)\tau(R)=P'R'$

I.D.I $\Rightarrow$ Ah: Naj bosta Q in $Q'\in\mathcal{A}_0$ različni. Definiramo translacijo $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, da je $\tau(Q)=Q'$.



- $X\notin QQ'$

Naj bo $\tau(X)$ edina točka v poljubni premici, ki je vzporedna QX in gre skozi Q' in premica, ki je vzporedna Q' in gre skozi X.



- $X\in QQ'$

Potrebno je pravilno izbrati, da je $\tau(X)$ neodvisen od točke P.

Naj bo $\tau(X)$ oddaljena, ko smo izbrali P. Pokazati moramo, da je $\tau(R)\,\tau(X)\parallel RX$.

Po 1.D.I velja, da je $PR\parallel\tau(P)\tau(R)$

Sedaj po vrsti: $RX\parallel\tau(R)\tau(X)$. ✓

Pravimo še, da je τ res translacija.

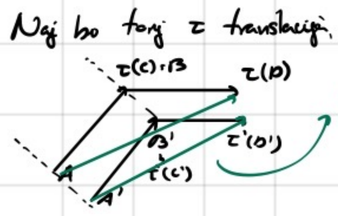
Naj bo $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_0,\mathcal{A}_1)$ a.d.a.r. Usmerjena daljica v $\mathcal{A}$ je urejen par (A,B), kjer sta $A,B\in\mathcal{A}_0$. Usmerjeni daljici AB in CD sta ekvivalentni, če obstaja translacija $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, da je $\tau(A)=C$ in $\tau(B)=D$. Vektor v $\mathcal{A}$ je ekvivalenčni razred usmerjene daljice, ponavadi pišemo $[(A,B)]=:\vec{AB}$.

Ah „omogoča" seštevanje vektorjev $\vec{AB}+\vec{CD}$.

Obstaja natanko ena translacija $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$: $\tau(C)=B$. Tako definiramo $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AB}+\tau\vec{(C)\tau(D)}=\vec{A\tau(D)}$.

Še dobra definiranost: $\vec{AB}=\vec{A'B'}$, $\vec{CD}=\vec{C'D'}$, mora $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{A'B'}+\vec{C'D'}$.

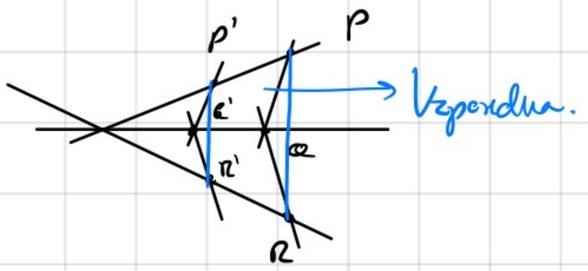
Naj bo torej τ translacija, da je $\tau(C)=B$ in τ' taka, da je $\tau'(C')=B'$. Velja: $\tau'\vec{(C)\,\tau'(D')}=\vec{C'D'}=\vec{CD}=\tau\vec{(C)\tau(D)}$



Sta vzporedni, saj 1.D.I to pove. Po 1.D.I, je $\vec{A\tau(D)}=\vec{A'\tau'(D')}$

$\vec{AB}+\vec{CD}$ $\quad$ $\vec{A'B'}+\vec{C'D'}$

Drugi Desarguesov izrek: Naj bodo p,q,r različne premice, ki se sekajo v skupni točki O. Naj bodo $P,P' \in p$, $Q,Q' \in q$ in $R,R' \in r$ take, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$. Tedaj je $PR \parallel P'R'$.



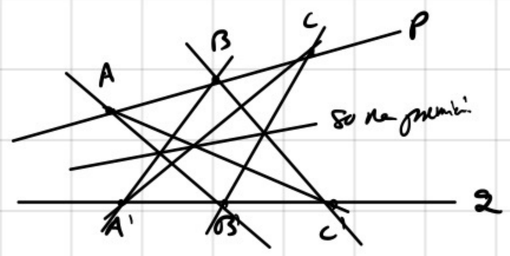
Ta izrek je ekvivalenten sledečemu aksiomu:

A5) V $\mathcal{A}$ obstaja točka O z lastnostjo: Če sta $Q,Q' \in \mathcal{A}_O$, taki točki, da so O,Q in Q' kolinearne, obstaja taka dilatacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\tau(O)=O, \tau(Q)=Q'$

Aksiom A5 nam omogoča definicijo obsega $\mathcal{O}$ in množenja vektorja s skalarjem

Izrek: Če a.d.a.r. $\mathcal{A}$ zadošča aksiomom A1-A5, obstaja obseg $\mathcal{O}$, da je $\mathcal{A} \cong \mathcal{O}^2$ (obstaja afina transformacija iz $\mathcal{O}^2 \to \mathcal{A}$).

Pappusov izrek: Naj bosta p in q različni premici v $\mathcal{O}^2$. Naj bodo $A,B,C \in p$, $A',B',C' \in q$ take točke, da $AB' \parallel A'B$, $AC' \parallel A'C$ in $BC' \parallel B'C$. Tedaj so točke $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$ in $BC' \cap B'C$ kolinearne.



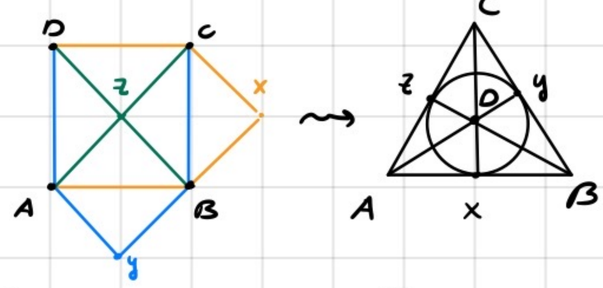
Ta izrek velja $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}$ je komutativen obseg / polje.

Projektivna geometrija

Vse vzporedne premice v afini ravnini „se sekajo na obzorju".

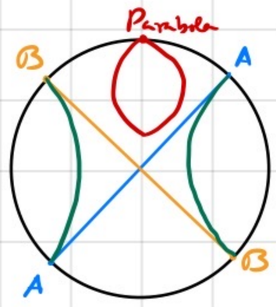
Projektivno ravnino dobimo, če afini ravnini dodamo točke na obzorju. Vsaki množici vzporednic, dodamo eno točko na obzorju. Vse nove točke ležijo na novi premici, ki jo imenujemo premica v neskončnosti.

Primer: $\mathbb{Z}_2^2$



Najmanjša projektivna ravnina: Fanova ravnina.

Primer: $\mathbb{R}^2$



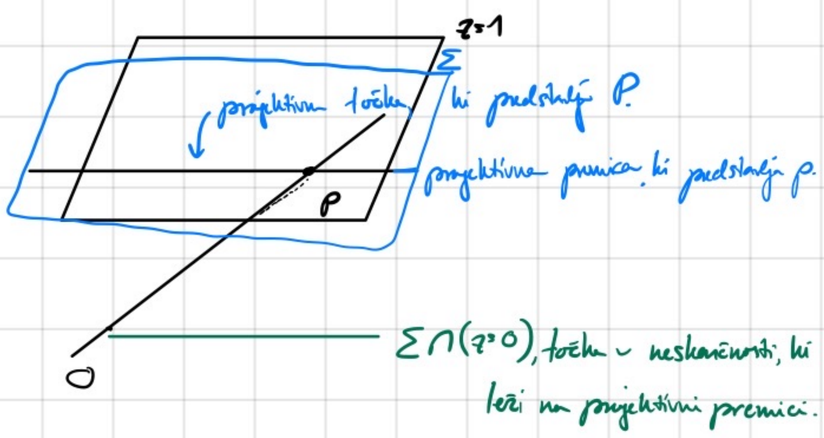
Ko hiperboli v $\mathbb{R}^2$ dodamo dve točki v neskončnosti (hiperbola ima dve asimptoti), dobimo sklenjeno krivuljo v projektivni ravnini

Realno afino ravnino vložimo v $\mathbb{R}^3$ na nivo $z=1$.

Vsaka točka $P \in A$ je enolično določena s premico, ki gre skozi P in izhodišče, O.

Obstajajo premice v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče, ki ne sekajo ravnine $z=1$. Te nam predstavljajo premice v neskončnosti na obzorju. Enorazsežni podprostori v $\mathbb{R}^3$ so tako projektivne točke.

Dvorazsežni podprostori v $\mathbb{R}^3$ so projektivne premice. Afino premico $p \subseteq A$ tako predstavlja ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki gre skozi O in vzporedna premica p. Taka projektivna premica vsebuje le eno projektivno točko v neskončnosti.



Definicija: Naj bo V vektorski prostor. Množica vseh vektorskih podprostorov v V se imenuje projektivna geometrija nad V in jo označimo s $P(V)$.

Enorazsežni prostori v V so projektivne točke, dvorazsežni prostori so projektivne ravnine in podprostori razsežnosti $\dim V - 1$ so projektivne hiperravnine.

Za $U \leq V$ definiramo projektivno razsežnost kot $\dim U - 1 = p\dim U$. Razsežnost geometrije $P(V)$ je $p\dim V$.

Naj bosta A in B različni projektivni točki v $P(V)$. Projektivna premica skozi A in B je $A \circledcirc B$.

Naj bo $p\dim P(V) = 2$ in naj bosta p in q projektivni premici v $P(V)$. $(\dim V = 3,\ \dim p = \dim q = 2)$

Tedaj je presek vsaj enorazsežen podprostor, zato se poljubni premici v projektivni ravnini sekata.

Dualnost

Naj bo V končno razsežen vektorski prostor nad poljem $\mathcal{F}$. Dualni vektorski prostor V^* je množica vseh linearnih funkcionalov $f: V \to \mathcal{F}$. V^* je tudi vektorski podprostor enake dimenzije kot V. Če je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza za V, je dualna baza za V^* $\{f_1, \dots, f_n\}$, kjer je $f_i: V \to \mathcal{F}$ definiran kot $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Torej sta V in V^* izomorfna, a izomorfizem ni naraven (odvisen je od izbire baze). Tako sta izomorfna tudi V in V^{**}. Še več: obstaja naravni izomorfizem $\varphi: V \to V^{**}$, $\varphi(v)(f) = f(v)$, $\varphi(v): V^* \to \mathcal{F}$

Definicija: Zgornji anihilator vektorskega podprostora $W \leq V$ je $W^\perp = \{f \in V^* \mid f(w) = 0 \ \forall w \in W\}$

Spodnji anihilator vektorskega podprostora $U \leq V$ je $U_\perp = \{v \in V \mid f(v) = 0 \ \forall f \in V^*\}$

Jasno sta $W^\perp$ in $U_\perp$ oba vektorska podprostora.

Izrek: Preslikava $\perp: P(V) \to P(V^*)$ je bijekcija, z inverzom $\perp: P(V^*) \to P(V)$.

Dokaz: $W \leq V$. $(W^\perp)_\perp = W$

$\supseteq$: $W \subseteq (W^\perp)_\perp$; $w \in W$. Po definiciji $W^\perp$: $f(w) = 0 \ \forall f \in W^\perp$.

Po definiciji W_1: $w \in (W^\perp)_\perp$.

·) $W \leq (W^\perp)_\perp$: Denimo, da obstaja $w \in W \Rightarrow w \notin (W^\perp)_\perp$

Iščemo funkcional $f \in W^\perp$, da $f(w) \neq 0$.

Naj bo $\{w_1, \dots, w_k\}$ baza za W, ki jo dopolnimo do baze za V: $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$.

$w_{k+1} := w$. Naj bo $f: V \to \mathcal{F}$ dualen funkcional k baznemu vektorju $w_{k+1} = w$.

Torej je $f(W) = 0$ in $f(w) = 1 \neq 0$, zato je $f \in W^\perp$ in $w \notin (W^\perp)_\perp$.

·) $U \leq V^*$ $(U_\perp)^\perp = U$.

$$U_\perp = \{v \in V \mid f(v) = 0 \ \forall f \in U\} \leq V$$
$$= \{f(v) \in V^{**} \mid f(\varphi(v)) = 0 \ \forall f \in U\} \leq V^{**}$$
$$= U^\perp$$

Sledaj operatorsko zgornji razmislek: $(U_\perp)^\perp = (U^\perp)^\perp = (U^\perp)_\perp = U$.

Izrek: 1.) $W_1 \leq W_2 \leq V \Rightarrow W_2^\perp \leq W_1^\perp \leq V^*$

2.) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$

3.) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$

4.) $\dim W^\perp = \dim V - \dim W = \operatorname{kodim} W$.

Dokaz: 1.) $f \in W_2^\perp \Rightarrow f(w) = 0 \ \forall w \in W_2 \supseteq W_1 \Rightarrow f \in W_1^\perp$.

2.) $\supseteq$: $W_1 \cap W_2 \leq W_1, W_2 \overset{1.}{\Rightarrow} W_1^\perp, W_2^\perp \leq (W_1 \cap W_2)^\perp \Rightarrow W_1^\perp + W_2^\perp \leq (W_1 \cap W_2)^\perp$.

$\subseteq$: $f \in (W_1 \cap W_2)^\perp \Rightarrow f(w) = 0 \ \forall w \in W_1 \cap W_2$.

$W_1 = (W_1 \cap W_2) \oplus U_1$

$W_2 = (W_1 \cap W_2) \oplus U_2$ $\quad v = w + u_1 + u_2 + u_0$, enolični zapis.

$V = (W_1 \cap W_2) \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus U_0$

Definiramo $f_1, f_2: V \to \mathcal{F}$: $f_1(v) = f_1(\underbrace{w + u_1}_{W_1} + u_2 + u_0) = f(u_2) + f(u_0)$

$f_2(v) = f_2(w + u_1 + u_2 + u_0) = f(u_1)$

$\Rightarrow f = f_1 + f_2$, $f_1 \in W_1^\perp$, $f_2 \in W_2^\perp$.

$\Rightarrow f \in W_1^\perp + W_2^\perp$.

3.) $\subseteq$: $W_1, W_2 \subseteq W_1 + W_2$

Po (1.) $\Rightarrow (W_1 + W_2)^\perp \leq W_1^\perp, W_2^\perp \Rightarrow (W_1 + W_2)^\perp \leq W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

$\supseteq$: $f \in W_1^\perp \cap W_2^\perp \Rightarrow f(w) = 0 \quad \forall w \in W_1, \forall w \in W_2$.

$w \in W_1 + W_2 \Rightarrow w = w_1 + w_2$; $w_i \in W_i$.

$f(w) = f(w_1 + w_2) = f(w_1) + f(w_2) = 0 \Rightarrow f \in (W_1 + W_2)^\perp$.

4.) $\{w_1, \dots, w_k\}$ baza za W, ki jo dopolnimo do baze $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ prostora V.

$\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ je dualna baza za V^*.

Naj bo $f = \sum_1^n \alpha_i f_i \in W^\perp$: ·) $f(w_i) = \alpha_i = 0$ za $i = 1, \dots, k$

·) $\left(\sum_{k+1}^n \alpha_i f_i\right)(u) = 0$ za $u \notin W$

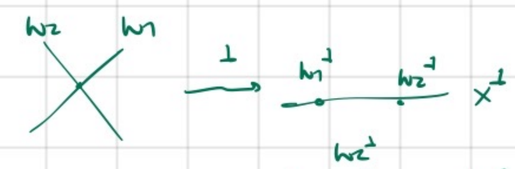
$\Rightarrow \{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ je baza za $W^\perp$ ■

4.) $\dim V = 3$: $^\perp$ preslika projektivno premico v projektivno točko in

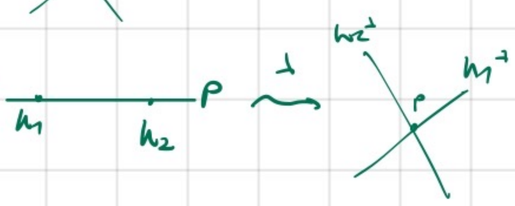
·)



·)



·)



Primer: $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\perp} \mathcal{P}((\mathbb{R}^3)^*) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \dashrightarrow \mathbb{R}^2$

$(a,b) \longmapsto \mathcal{L}in\{(a,b,1)\}$ $\quad \mathcal{L}in\{(x f_1, y f_2, z f_3)\} \longleftrightarrow \mathcal{L}in\{(x,y,z)\} \cong \mathcal{L}in\{x e_1^* + y e_2^* + z e_3^*\}$

$\hookrightarrow \{f = x f_1 + y f_2 + z f_3, \ f(a,b,1) = 0\} \leftrightarrow \{x,y,z; \ ax + by + z = 0\} \dashrightarrow$ premica $ax + by + 1 = 0$.

Če (a,b) leži na paraboli $y=\frac{1}{4}x^2$, se z zgornjo konstrukcijo preslika v premico $ax+\frac{1}{4}a^2y+1=0$. Za $y=x^2$ dobimo $ax+\frac{1}{4}a^2x^2+1=\left(\frac{ax}{2}+1\right)^2$.

Torej so vse premice tangentne na parabolo $y=x^2$.

Torej se z zgornjo konstrukcijo parabola $y=\frac{1}{4}x^2$ preslika v parabolo $y=x^2$, ki ji pravimo kot ovojnica dnevnih premic.

Definicija: Trditev τ o geometriji $\mathcal{P}(V)$ je izjava v kateri nastopajo elementi geometrije $\mathcal{P}(V)$ in relacije med njimi. $(\leq, \ni, \cap, +, \dim)$

Dualna trditev τ^* trditve τ je izjava o geometriji $\mathcal{P}(V^*)$, ki jo dobimo iz τ, če vse $W\leq V$ zamenjamo z njihovimi zgornjimi anihilatorji: $W^\perp\leq V^*$ + zamenjamo s $\cap$, $\wedge$ s plus, $\leq$ s $\geq$, $\ni$ s $\leq$ in dim s kodim.

Primeri: τ: V projektivni ravnini $\mathcal{P}(V)$ skoraj poljubni točki potekata natanko ena premica.

τ: $\dim V=3$, $\forall A,B\leq V$: $\dim A=\dim B=1$ $\exists!\, p\leq V$, $\dim p=2$, da je $A,B\leq p$.

τ^*, $\dim V^*=3$, $\forall A^\perp,B^\perp\leq V^*$, $\operatorname{kodim} A=\operatorname{kodim} B=1$ $\exists!\, p\leq V^*$ $\operatorname{kodim} p=2$, da je $A^\perp,B^\perp\geq p$.

oz. $\forall p,q\leq V^*$, $\dim p,q=2$ $\exists!\, X\leq V^*$, $\dim X=1$: $X\leq p,q$.

oz. poljubni premici v V^* se sekata v natanko eni točki.

Primer: τ: A,B,C so kolinearne točke v $\mathcal{P}(V)$ $(\dim V=3)$

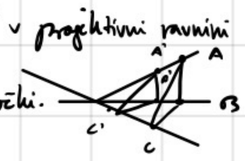
$\dim A=\dim B=\dim C=1$, $\exists p$ $\dim p=2$: $A,B,C\leq p$.

τ^*: $\dim A^\perp=\dim B^\perp=\dim C^\perp=2$, $\exists p^\perp, \dim p^\perp=1$: $A^\perp,B^\perp,C^\perp\geq p^\perp$.

Premice $A^\perp,B^\perp,C^\perp$ se sekajo v skupni točki.

Izrek (Princip dualnosti) Za vsako resnično trditev o geometriji $\mathcal{P}(V)$ dobimo resnično trditev τ^* o geometriji $\mathcal{P}(V^*)$.

Definicija: Trikotnika ABC in $A'B'C'$ v projektivni ravnini sta v perspektivni legi, če $A\neq A'$, $B\neq B'$ in $C\neq C'$ in se premice AA', BB' in CC' sekajo v skupni točki.



Desarguesov izrek: Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta v perspektivni legi $\Leftrightarrow$ presečišča $X=AB\cap A'B'$, $Y=AC\cap A'C'$ in $Z=BC\cap B'C'$ ležijo na isti premici.

Dokaz: $\Rightarrow$ ABC, $A'B'C'$ so v perspektivni legi.

Naj bo $P=AA'\cap BB'\cap CC'$. Izberimo $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, $a'\in A'$, $b'\in B'$, $c'\in C'$, $p\in P$ neničelni vektorji.

Tedaj je $p=\alpha a+\alpha' a'=\beta b+\beta' b'=\gamma c+\gamma' c'$ za neke $\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,\gamma'\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $X:=\alpha a-\beta b=\beta' b'-\alpha' a'\in AB\cap A'B'=X$.

$\Rightarrow$ $y:=\alpha a-\gamma c=\gamma' c'-\alpha' a'\in AC\cap A'C'=Y$

$\Rightarrow$ $z:=\beta b-\gamma c=\gamma' c'-\beta' b'\in BC\cap B'C'=Z$.

$z=y-x\Rightarrow X,Y,Z$ so kolinearne

Trditev ($\Rightarrow$) pravi: A,B,C nekolinearne, A',B',C' nekolinearne, AA',BB',CC' se sekajo v skupni točki $\Rightarrow$ $AB\cap A'B'$, $AC\cap A'C'$, $BC\cap B'C'$ so kolinearne.

($\Rightarrow$)*: označimo $p=A^\perp$, $q=B^\perp$, $r=C^\perp$, $p'=A'^\perp$, $q'=B'^\perp$, $r'=C'^\perp$, $E:=p\cap q$, $F:=p\cap r$, $G:=q\cap r$. $E':=p'\cap q'$, $F':=p'\cap r'$, $G':=q'\cap r'$.

$\Rightarrow$ $p=EF$, $q\in EG$, $r\in FG$, $p'\in E'F'$, $q'\in E'G'$, $r=F'G'$.

$(AA')^\perp=(A+A')^\perp=A^\perp\cap A'^\perp=p\cap p'=EF\cap E'F'$.

$(BB')^\perp=(B+B')^\perp=B^\perp\cap B'^\perp=q\cap q'=EG\cap E'G'$

$(CC')^\perp=(C+C')^\perp=C^\perp\cap C'^\perp=r\cap r'=FG\cap F'G'$.

$(AB\cap A'B')^\perp=(AB)^\perp+(A'B')^\perp=(A^\perp\cap B^\perp)+(A'^\perp\cap B'^\perp)=(p\cap q)+(p'\cap q')=E+E'=\underline{\underline{EE'}}$

$(AC\cap A'C')^\perp=(AC)^\perp+(A'C')^\perp=(p\cap r)+(p'\cap r')=F+F'=FF'$.

$(BC\cap B'C')^\perp=(BC)^\perp+(B'C')^\perp=(q\cap r)+(q'\cap r')=GG'$.

($\Rightarrow$)*: p,q,r se ne sekajo v skupni točki ($\Leftrightarrow EFG$ je trikotnik)

p',q',r' se ne sekajo v skupni točki ($\Leftrightarrow E'F'G'$ je trikotnik)

$EF\cap E'F'$, $EG\cap E'G'$ in $FG\cap F'G'$ so kolinearne.

Sledi: EE', FF' in GG' se sekajo v skupni točki

($\Leftrightarrow EFG$ in $E'F'G'$ sta v perspektivni legi).

Trditev ($\Rightarrow$) je dualna trditve trditve ($\Leftarrow$), zato Desarguesov izrek velja v obe smeri.

Vložitev afine geometrije v projektivno.

V... vektorski prostor nad $\mathcal{O}$, $\dim V = n+1$

$W < V$, $\dim W = n$

$a \in V \setminus W$, $\mathcal{A} := a + W$, afin prostor v V. ($\mathcal{A}$ ne vsebuje točke 0).

Za afin podprostor $X \subseteq \mathcal{A}$ definiramo $l(X) = Lin(X) < V$, torej je $l: A(\mathcal{A}) \to P(V)$.

Velja: • $l(x+U) = Lin\{x\} \oplus U \Rightarrow l$ je dobro definirana, točke slika v projektivne točke.

• $l(x+U) \cap \mathcal{A} = x+U \Rightarrow l$ ima levi inverz, zato je injektivna

• če $Z < V$, $Z \not\subseteq W$ je $Z \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ in $l(Z \cap \mathcal{A}) = Z$. $\dim(Z \cap \mathcal{A}) = \dim Z - 1$

Izrek: Preslikava $l: A(\mathcal{A}) \to P(V)$ ima sledeče lastnosti:

1.) l je injektivna

2.) $Z \leq V$ je v sliki preslikave $\Leftrightarrow Z \not\subseteq W$. Torej $\mathrm{im}\, l = P(V) \setminus P(W)$

3.) l ohranja inkluzije: $X \subseteq Y \Rightarrow l(X) \leq l(Y)$.

4.) $\{X_\lambda\}_\lambda$ družina afinih podprostorov v A z nepraznim presekom, je $l(\cap\{X_\lambda\}_\lambda) = \cap\{l(X_\lambda)\}_\lambda$

5.) $\{X_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ družina afinih podprostorov v $\mathcal{A}$, potem je $l(Af(\bigcup_\lambda X_\lambda)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} l(X_\lambda)$.

6.) $\dim X = p\dim l(X)$.

7.) $X \parallel Y$ v $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ ko je $l(X) \cap W \subseteq l(Y) \cap W$ ali pa obratno.

Dokaz: 7.) $l(\overset{a+U}{\overset{''}{X}}) \cap W = (Lin\{\underset{\hat{a}}{a}\} \oplus \underset{\hat{W}}{U}) \cap W = U$. $(\leq W)$.

$l(\overset{a'+U'}{\overset{''}{Y}}) \cap W = U'$

$X \parallel Y \overset{def}{\Leftrightarrow} U \leq U'$ ali $U' \leq U$

$\Leftrightarrow l(X) \cap W \leq l(Y) \cap W$ ali obrat.

Preslikava $l: A(\mathcal{A}) \to P(V)$ je vložitev afine v projektivno. Označimo s PV množico vseh točk v $P(V)$.

Tedaj je $PV = PW \sqcup \{Lin\{x\} ; x \in \mathcal{A}\}$. Množico PW imenujemo hiperravnina v neskončnosti - ta je odvisna od izbire vložitve.

Primer: $\dim V = 3$, $W < V$, $\dim W = 2$, $\mathcal{A} = a + W$. $l: A(\mathcal{A}) \to P(V)$.

Naj bosta $p, q \subseteq \mathcal{A}$ vzporedni premici.

$\Rightarrow l(p) \cap W$ je točka v neskončnosti

$\Rightarrow l(q) \cap W$ je točka v neskončnosti

Po točki (7.): $p \parallel q \Leftrightarrow l(q), l(p)$ se sekata v neskončnosti

Premice p, q, r so vzporedne $\Leftrightarrow$ ko se sekajo v neskončnosti

Drugi Desarguesov izrek za afino ravnino: Naj bodo p, q, r različne premice, ki se sekajo v skupni točki $O \in \mathcal{A}$.

Naj bodo $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$ in $R, R' \in r$ take točke, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$

Tedaj je $PR \parallel P'R'$.

Dokaz: $\mathcal{A} \leq V$ (če gre $\mathcal{A}$ skozi izhodišče, $\mathcal{A}$ transliramo za vektor, ki mu v $\mathcal{A}$)

Naj bo $l: A(\mathcal{A}) \to P(V)$ vložitev afine v projektivno ravnino.

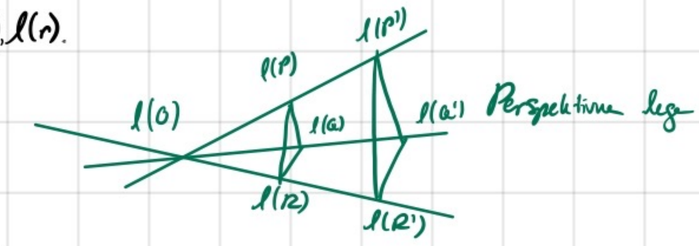
Ker l ohranja inkluzije, $l(O)$ leži na projektivnih premicah $l(p), l(q), l(r)$.

Ker $PQ \parallel P'Q'$, se premici $l(P)l(Q)$ in $l(P')l(Q')$ sekata v neskončnosti.

Enako se premici $l(Q)l(R)$ in $l(Q')l(R')$ sekata v neskončnosti.

Ker $l(P), l(P') \in l(p)$ in $l(Q), l(Q') \in l(q)$ in $l(R), l(R') \in l(r)$,

sta trikotnika $l(P)l(Q)l(R)$ in $l(P')l(Q')l(R')$ v perspektivni legi.



Po Desarguesovem izreku za projektivno ravnino: preseščišča $l(P)l(Q) \cap l(P')l(Q')$, $l(Q)l(R) \cap l(Q')l(R')$ in $l(R)l(Q) \cap l(R')l(Q')$ na isti premici.

Ker sta dve preseščišči v neskončnosti, je tretja tretja točka v neskončnosti. Torej $PR \parallel P'R'$. ■

Prvi Desarguesov izrek za afino ravnino: Naj bodo p, q, r različne vzporedne premice v afini ravnini $\mathcal{A}$. Naj bodo $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$, $R, R' \in r$ take, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$. Tedaj je $PR \parallel P'R'$.

Dokaz: Naj bo $l: A(\mathcal{A}) \to P(V)$ kot proj. Ker $p \parallel_2 \parallel r$, se $l(p), l(q), l(r)$ slikajo v skupni točki v neskončnosti. Ostala je enaka kot proj. ■

Kolineacije in projektivnosti

Definicija: Naj bosta V, V' vektorska prostora nad O, $\dim V = \dim V' \geq 3$. Bijektivna preslikava $\vartheta: PV \to PV'$ se imenuje kolineacija, če poljubne kolinearne točke slika v kolinearne.

Primer: $A: V \to V'$ bijektivna semilinearna preslikava.

$\vartheta_A : PV \to PV'$, $\vartheta_A(X) = AX$

X, Y, Z kolinearne $\Rightarrow$ $Z \leq X \oplus Y$ $\Rightarrow$ $AZ \leq A(X \oplus Y) = AX \oplus AY$

$\Rightarrow \vartheta_A(Z) \leq \vartheta_A(X) \oplus \vartheta_A(Y)$ $\Rightarrow$ so kolinearne.

$\Rightarrow \vartheta_A$ je kolineacija

Lema: $\vartheta: PV \to PV'$ kolineacija in $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k \in PV$. Če $\mathcal{L} < \mathcal{L}_1 + \dots + \mathcal{L}_k$, je $\vartheta(\mathcal{L}) < \vartheta(\mathcal{L}_1) + \dots + \vartheta(\mathcal{L}_k)$.

Dokaz: Indukcija na k.

$k = 2$: $\mathcal{L} < \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ $\Rightarrow$ to so kolinearne točke $\Rightarrow \vartheta(\mathcal{L}), \vartheta(\mathcal{L}_1), \vartheta(\mathcal{L}_2)$ so kolinearne in velja.

$k \to k+1$: $\mathcal{L} < \mathcal{L}_1 + \dots + \mathcal{L}_k + \mathcal{L}_{k+1}$. Izberemo neničelni $v \in \mathcal{L}$. $v = (v_1 + \dots + v_k) + v_{k+1}$

$\Rightarrow v \in Lin\{v_1, \dots, v_k\} + Lin\{v_{k+1}\}$

$\Rightarrow \vartheta(\mathcal{L}) < \vartheta(Lin\{v_1 + \dots + v_k\}) + \vartheta(\mathcal{L}_{k+1}) \overset{I.P.}{<} (\vartheta(\mathcal{L}_1) + \dots + \vartheta(\mathcal{L}_k)) + \vartheta(\mathcal{L}_{k+1})$ ■

Kolineacijo $\vartheta: PV \to PV'$ lahko razširimo do preslikave $\tilde{\vartheta}: P(V) \to P(V')$ s predpisom $\tilde{\vartheta}(\mathcal{L}_1 + \dots + \mathcal{L}_k) = \vartheta(\mathcal{L}_1) + \dots + \vartheta(\mathcal{L}_k)$. Preslikava $\tilde{\vartheta}$ je bijekcija, ki ohranja inkluzijo.

Po prejšnji lemi je $\tilde{\vartheta}$ dobro definirana, saj iz $\mathcal{L}_1 + \dots + \mathcal{L}_k = \mathcal{M}_1 + \dots + \mathcal{M}_l$ sledi $\vartheta(\mathcal{L}_i) < \vartheta(\mathcal{M}_1) + \dots + \vartheta(\mathcal{M}_l) = \tilde{\vartheta}(\mathcal{M}_1 + \dots + \mathcal{M}_k)$ in zato $\tilde{\vartheta}(\mathcal{L}_1 + \dots + \mathcal{L}_k) < \tilde{\vartheta}(\mathcal{M}_1 + \dots + \mathcal{M}_l)$.

Obratna inkluzija sledi z enakim razmislekom.

Trditev: Naj bo $\vartheta: PV \to PV'$ kolineacija in $X, Y < V$.

1.) $\tilde{\vartheta}(X + Y) = \tilde{\vartheta}(X) + \tilde{\vartheta}(Y)$

2.) $\tilde{\vartheta}(X \cap Y) = \tilde{\vartheta}(X) \cap \tilde{\vartheta}(Y)$.

Dokaz:

1.) $X = \mathcal{L}_1 + \dots + \mathcal{L}_k$, $Y = \mathcal{M}_1 + \dots + \mathcal{M}_l$

$\Rightarrow X + Y = \mathcal{L}_1 + \dots + \mathcal{L}_k + \mathcal{M}_1 + \dots + \mathcal{M}_l$.

$\Rightarrow \tilde{\vartheta}(X + Y) = \tilde{\vartheta}(X) + \tilde{\vartheta}(Y)$.

2.) $\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)$

$\dim(\tilde{\vartheta}(X + Y)) \overset{(1.)}{=} \dim(\tilde{\vartheta}(X) + \tilde{\vartheta}(Y)) = \dim \tilde{\vartheta}(X) + \dim(\tilde{\vartheta}(Y)) - \dim(\tilde{\vartheta}(X) \cap \tilde{\vartheta}(Y))$

$\Rightarrow \dim(X \cap Y) = \dim(\tilde{\vartheta}(X) \cap \tilde{\vartheta}(Y)) = \dim \tilde{\vartheta}(X \cap Y)$

Ker $X \cap Y \leq X$ in Y $\Rightarrow \tilde{\vartheta}(X \cap Y) \leq \tilde{\vartheta}(X)$ in $\tilde{\vartheta}(Y)$ $\Rightarrow \tilde{\vartheta}(X \cap Y) \leq \tilde{\vartheta}(X) \cap \tilde{\vartheta}(Y)$.

Enakost sledi iz enakosti dimenzij.

Izrek (Osnovni izrek projektivne geometrije): Naj bosta V, V' vektorska prostora nad $\mathcal{O}$, $\dim V = \dim V' \geq 3$. Za vsako kolineacijo $\vartheta: PV \to PV'$ obstaja obrnljiva semilinearna preslikava $A: V \to V'$, da je $\vartheta(\mathcal{L}) = A\mathcal{L}$ $\forall \mathcal{L} \in PV$.

Dokaz: Izberemo $W < V$, $\dim W = \dim V - 1$, $W' := \tilde{\vartheta}(W)$.

$a \in V \setminus W$. $\mathcal{A} := a + W$. Izberemo $a' \in \vartheta(Lin\{a\}) \setminus \{0\}$ in $\mathcal{A}' = a' + W'$.

Definiramo $\gamma: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ s predpisom $\gamma(x) = \vartheta(Lin\{x\}) \cap \mathcal{A}'$.

Velja: $Lin\{\gamma(x)\} = \vartheta(Lin\{x\})$ (*)

γ je surjektivna: $y \in \mathcal{A}' \Rightarrow Lin\{y\} \cap \mathcal{A}' = y$.

Ker je ϑ surjektivna, obstaja $x \in \mathcal{A}$, da je $\vartheta(Lin\{x\}) = Lin\{y\} \Rightarrow \gamma(x) = Lin\{y\} \cap \mathcal{A}' = y$

γ je injektivna: $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$ / Lin

$Lin\{\gamma(x_1)\} = Lin\{\gamma(x_2)\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \vartheta(Lin\{x_1\}) = \vartheta(Lin\{x_2\}) \overset{\vartheta \text{ inj.}}{=} Lin\{x_1\} = Lin\{x_2\} \overset{\cap \mathcal{A}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$.

γ je afina transformacija: $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{A}$ kolinearne. $\Rightarrow x_1, x_2, x_3 \in p$ za neko premico p.

tudi točk

$\Rightarrow f(x_i) = \tilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{x_i\}) \cap A' \subseteq \tilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{p\}) \cap A'$.

/ker je $\tilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{p\}) \cap A'$ (afina) premica, vse točke $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ kolinearne.

_f_ohranja_vzporednost: $l: \mathcal{A} \to \mathcal{PV}$, $l': \mathcal{A}' \to \mathcal{PV}'$ naj bosta vložitvi afine geometrije v projektivno.

$p_1 \| p_2$ v $\mathcal{A} \Leftrightarrow l(p_1) \cap W = l(p_2) \cap W$. /$\vartheta$

$\Leftrightarrow \tilde{\vartheta}(l(p_1) \cap W) = \tilde{\vartheta}(l(p_2) \cap W)$

$\tilde{\vartheta}(l(p_1)) \cap W' = \tilde{\vartheta}(l(p_2)) \cap W'$

$\mathrm{Lin}\{f(p_1)\} \quad \mathrm{Lin}\{f(p_2)\} \Leftrightarrow f(p_1) \| f(p_2)$. ✓

Po osnovnem izreku afine geometrije obstaja obrnljiva semilinearna preslikava, $\mathcal{B}: W \to W'$, $c \in \mathcal{A}$, da je $f(x) = \mathcal{B}(x-a) + c$.

Naj bo $\mathcal{F}$ avtomorfizem, ki pripada preslikavi $\mathcal{B}$. Definiramo: $A: V \to V'$ s predpisom $A(w + \lambda a) := \mathcal{B}(w) + \mathcal{F}(\lambda)c$.

Po konstrukciji je A semilinearna z avtomorfizmom $\mathcal{F}$. Ker A slika baze v baze, je A bijektivna.

$\vartheta(L) = AL$: i) $L \nsubseteq W$: $\exists S \in L: x = w + a \in L \Rightarrow x \in \mathcal{A}$.

$\vartheta(\mathrm{Lin}\{x\}) \cap \mathcal{A}' = f(x) = \mathcal{B}(x-a) + c = A(x-a) + Aa = Ax$. /lin. (*).

$\vartheta(\mathrm{Lin}\{x\}) = \mathrm{Lin}\{Ax\} = A(\mathrm{Lin}\{x\})$. ✓

ii) $L \subseteq W$: $\vartheta(\mathrm{Lin}\{x\}) = \vartheta(\mathrm{Lin}\{x+a, a\} \cap W) = \tilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{x+a\} \oplus \mathrm{Lin}\{a\}) = \vartheta(\mathrm{Lin}\{x+a\}) \oplus \vartheta(\mathrm{Lin}\{a\})) \cap W'$.

$\overset{(1.)}{\Rightarrow} = (\mathrm{Lin}\{A(x+a)\} \oplus \mathrm{Lin}\{a\}) \cap W' = \mathrm{Lin}\{Ax + Aa, Aa\} \cap W' = \mathrm{Lin}\{Ax\}$

Definicija: $\vartheta = \vartheta_A$, rečemo da je kolineacija ϑ porojena s semilinearno preslikavo A. (Tudi v primeru $\dim V = 2$).

Če ϑ_A pripada linearna preslikava A, ji rečemo projektivnost.

Opomba: Za $\mathcal{O} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p\}$, je vsaka kolineacija kar projektivnost.

Trditev: Množica vseh kolineacij $\mathcal{PV} \to \mathcal{PV}$ je grupa za kompozitum.

Podmnožica vseh projektivnosti je podgrupa edinka.

Definicija: $GL(V)$... grupa vseh obrnljivih linearnih preslikav iz $V \to V$.

$\Gamma L(V)$... grupa vseh obrnljivih semilinearnih preslikav $V \to V$.

$PGL(V)$... grupa vseh projektivnosti $\mathcal{PV} \to \mathcal{PV}$.

$P\Gamma L(V)$... grupa vseh kolineacij $\mathcal{PV} \to \mathcal{PV}$.

$\mathcal{O}^{-1}$... vsi obrnljivi elementi, grupa za množenje, je naravno enačimo z grupo vseh skalarnih matrik v $GL(V)$ oz. $\Gamma L(V)$.

Izrek: $P\Gamma L(V) \cong \Gamma L(V)/\mathcal{O}^{-1}$ in $PGL(V) \cong GL(V)/\mathcal{O}^{-1}$

Dokaz: Definiramo $\xi: \Gamma L(V) \to P\Gamma L(V)$, $\xi(A) = \vartheta_A$

Ker je $\vartheta_{AB}(L) = AB(L) = A(B(L)) = \vartheta_A(\vartheta_B(L))$,

je ξ homomorfizem.

Po osnovnem izreku projektivne geometrije je ξ surjektivna.

Dokažimo: $\ker \xi = \mathcal{O}^{-1}$:

$\supseteq$: $\lambda \in \mathcal{O}^{-1} \Rightarrow \vartheta_{\lambda I}(L) = \lambda I(L) = L$. $\Rightarrow \vartheta_{\lambda I} = id_{\mathcal{PV}} \Rightarrow \lambda I \in \ker \xi$.

$\subseteq$: $A \in \ker \xi \Rightarrow A(\mathrm{Lin}\{x\}) = \mathrm{Lin}\{x\} \Rightarrow$ obstaja $\lambda \in \mathcal{O}^{-1}$, da je $Ax = \lambda_x x$.

Če x, y lin. neodvisna: $A(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y \Rightarrow \lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$

$Ax + Ay = \lambda_x x + \lambda_y y$

Če sta lin. odvisna: Izberemo z, ki je lin. neodvisen z x, y: $\lambda_x = \lambda_z = \lambda_y$.

Torej je $Ax = \lambda x \ \forall x \in V$, zato $A = \lambda I \in \mathcal{O}^{-1}$.

Definicija: $\dim V = n$. Množico projektivnih točk $\{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$ imenujemo projektivno ogrodje za $\mathcal{PV}$, če

nobena n-terica točk ne leži na skupni hiperravnini.

Primer: $\dim V = 2$. ($\mathcal{PV}$ je projektivna premica), $\{L_0, L_1, L_2\}$ je projektivno ogrodje $\Leftrightarrow L_0, L_1, L_2$ so različne točke.

Hiperravnina v tem primeru je točka.

$\dim V = 3$ ($\mathcal{PV}$ je projektivna ravnina): $\{L_0, L_1, L_2, L_3\}$ je projektivno ogrodje $\Leftrightarrow$ nobena trojica točk ni kolinearna.

Trditev: Naj bo $\{L_0,\dots,L_n\}$ projektivno ogrodje za PV in $\vartheta: PV \to PV$ taka, da je $\vartheta(L_i)=L_i$ $\forall i=0,\dots,n$.
Tedaj je projektivnost $\vartheta = id$.

Dokaz: Izberimo $v_i \in L_i \setminus \{0\}$. Naj bo A lin., da je $\vartheta = \vartheta_A \Rightarrow Av_i = \lambda_i v_i$ $\forall i$.

Ker nobena n-terica projektivnih točk ne leži na hiperravnini, je poljubna n-terica vektorjev v_i baza (sicer bi bili lin. odv. in bi ležali na hiperravnini) za V.

$\Rightarrow v_0 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ za neke $\beta_i \in \mathbb{R}$

Če $\beta_i = 0$, vektorji $v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots v_n$ niso baza $\nrightarrow$, zato imamo samo neničelne skalarje.

$\Rightarrow \lambda_0 v_0 = \lambda_0\beta_1 v_1 + \dots + \lambda_0\beta_n v_n$

$Av_0 = A(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) = \beta_1\lambda_1 v_1 + \dots + \beta_n\lambda_n v_n \Rightarrow \lambda_0\beta_i = \beta_i\lambda_i \Rightarrow \lambda_i = \lambda_0$ $\forall i$.

$\Rightarrow A = \lambda_0 I \Rightarrow \vartheta = id$.

Posledica: Naj bo $\{L_0,\dots,L_n\}$ projektivno ogrodje za PV in $\{M_0,\dots,M_n\}$ projektivno ogrodje za PV'. Tedaj obstaja natanko ena projektivnost $\vartheta: PV \to PV'$, da je $\vartheta(L_i) = M_i$ $\forall i$.

Dokaz: Izberemo $v_i' \in L_i \setminus \{0\}$. $\Rightarrow v_0' = \alpha_1 v_1' + \dots + \alpha_n v_n'$ za neke α_i, neničelni.

$\Rightarrow$ BSS $\alpha_i = 1$.

Izberemo $u_i \in M_i \setminus \{0\}$, da je $u_0 = u_1 + \dots + u_n$. Definiramo linearno preslikavo $A: V \to V'$, $Av_i' = u_i$ za $i \neq 1$.

Tedaj je $\vartheta_A(L_i) = \vartheta_A(Lin\{v_i'\}) = Lin\{Av_i'\} = M_i$ za $i = 1,\dots,n$.

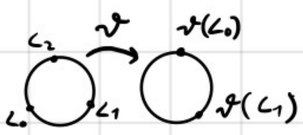
in $\vartheta_A(L_0) = \vartheta_A(Lin\{v_1',\dots,v_n'\}) = Lin\{A(v_1' + \dots + v_n')\} = Lin\{u_1 + \dots + u_n\} = M_0$.

Denimo, da je $\tilde{\vartheta}: PV \to PV'$ projektivnost, za katero je $\tilde{\vartheta}(L_i) = M_i$ za vse i.

Tedaj je $\vartheta_A^{-1} \circ \tilde{\vartheta}: PV \to PV$ projektivnost, za katero velja: $(\vartheta_A^{-1} \circ \tilde{\vartheta})(L_i) = L_i$ $\forall i$

Po tradiciji je $\vartheta_A^{-1} \circ \tilde{\vartheta} = id$ oz. $\tilde{\vartheta} = \vartheta_A$.

Primer: $V = \mathbb{R}^2$, $\{L_0, L_1, L_2\}$ projektivno ogrodje. $\vartheta: P\mathbb{R}^2 \to P\mathbb{R}^2$



Slika $\vartheta(L_2)$ nam pove, ali ϑ ohrani ali obrne orientacijo.

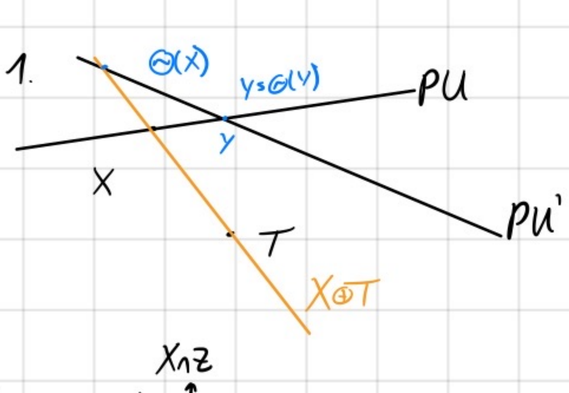
Perspektivnost:

Definicija: Naj bosta $U, U' < V$, $\dim U = \dim U'$ in $T < V$, da je $U \oplus T = V = U' \oplus T$.
Preslikavo $\Theta: PU \to PU'$, podano s predpisom $\Theta(X) = (X \oplus T) \cap U'$, imenujemo perspektivnost s centrom T.

Opomba: Ali je sploh dobro definirana? Da, saj velja:

$$\dim((X\oplus T)\cap U') = \dim X\oplus T + \dim U' - \dim(\underbrace{X\oplus T + U'}_{V})$$
$$= \dim X + \dim T + \dim U' - \dim V$$
$$= \dim X = 1, \text{ dobimo projektivno točko.}$$

Primer: $V = \mathbb{R}^3$. $\dim U = \dim U' = 2$, center $\dim T = 1$.



Lema: Za $X, Y, Z < V$, $Z < X$, velja: $X \cap (Y + Z) = (X \cap Y) + Z$ ($Z \subseteq X \cap Y$)

Dokaz: ($\supseteq$): $\left.\begin{matrix} X\cap Y < X,\ Y+Z \\ Z < X,\ Y+Z \end{matrix}\right\} \Rightarrow X\cap Y + Z \leq X\cap(Y+Z)$.

($\subseteq$): $x \in X \cap (Y+Z) \Rightarrow x = y+z \in Y+Z \Rightarrow y = x-z \in X \Rightarrow y \in X\cap Y$

$\Rightarrow x = \underbrace{y+z}_{\in X\cap Y} \in (X\cap Y) + Z$ ∎

Lema: Naj bo $\Theta: PU \to PU'$ perspektivnost s centrom T. Potem je njen inverz $\Theta': PU' \to PU$ perspektivnost s centrom T.

Dokaz: Naj bo $\eta : PU' \to PU$ perspektivnost s centrom T. $\Theta(X) \oplus T = \big(\overbrace{X \oplus T}^{x} \cap U'\big) \oplus \overbrace{T}^{z}$.
Po prejšnji lemi: $(X \oplus T) \cap (U' \oplus T) = (X \oplus T) \cap V = X \oplus T$.
$\eta(\Theta(X)) = (\Theta(X) \oplus T) \cap U = X \oplus T \cap \overbrace{U}^{x} \underset{\text{Cema}}{=} X \oplus (T \cap U) = X$.
Enako dobimo $\Theta(\eta(X)) = X = \overbrace{\Theta'}^{z} = \eta$. ■

Izrek: Vsaka perspektivnost je projektivnost.

Dokaz: $\Theta : PU \to PU'$ naj bo perspektivnost s centrom T. Izberimo bazo $\{u_1, \dots, u_k\}$ za U in označimo $L_i := Lin\{u_i\}$, $i = 1, \dots, k$.
Označimo: $L_i' = \Theta(L_i) = (L_i \oplus T) \cap U'$, $i = 1, \dots, k$
Izberimo neničelne vektorje $u_i' \in L_i' \Rightarrow u_i' = \alpha u_i + t_i \in L_i \oplus T$.
Če je $\alpha_i = 0$, je $u_i' \in U' \cap T$, kar ni možno. $\Rightarrow$ BSS: $\alpha_i = 1$ $\forall i$.
Definiramo linearno preslikavo $A : U \to U'$, $Au_i = u_i'$
Za $L = Lin\{u\} \in PU$, je $u = \sum_1^k \alpha_i u_i = \sum_1^k \alpha_i (u_i' - t_i) = \sum_1^k \alpha_i u_i' + t = \sum_1^k \alpha_i A u_i + t = A\left(\sum_1^k \alpha_i u_i\right) + t = Au + t$.
$\Theta(L) = (L \oplus T) \cap U' = (Lin\{u\} \oplus T) \cap U' = (Lin\{Au + t\} \oplus T) \cap U' = Lin\{\overbrace{Au}^{z} + t\} \oplus \overbrace{T}^{y} \cap \overbrace{U'}^{x} = Lin\{Au\} \oplus (T \cap U') = Lin\{Au\} = AL$
$\Rightarrow \Theta = \overrightarrow{A}$ je projektivnost. ■

Homogene koordinate:

Definicija: Na $\mathbb{O}^n \setminus \{0\}$ definiramo ekvivalenčno relacijo: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \sim (\beta_1, \dots, \beta_n) \Leftrightarrow$ obstaja $\lambda \neq 0$:
$\beta_i = \lambda \alpha_i$ $\forall i = 1, \dots, n$.
Ekvivalenčni razred n-terice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ z $[\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n]$

Izberimo projektivno ogrodje $\{L_0, \dots, L_n\}$ za PV. Za vsak i izberemo $u_i \in L_i \setminus 0$, da je $u_0 = u_1 + \dots + u_n$.
Vsaki projektivni točki $L = Lin\{u\} = Lin\{\sum_1^n \alpha_i u_i\}$ priredimo homogene koordinate $[\alpha_1 : \dots : \alpha_n]$

Homogene koordinate so dobro definirane, tj. $Lin\{\sum_1^n \alpha_i u_i\} = Lin\{\sum \beta_i u_i\} \Rightarrow [\alpha_1 : \dots : \alpha_n] = [\beta_1 : \dots : \beta_n]$.
Obstaja $\lambda \neq 0$: $\lambda \sum_1^n \alpha_i u_i = \sum_1^n \beta_i u_i = \sum_1^n \lambda \alpha_i u_i \Rightarrow \beta_i = \lambda \alpha_i$ $\forall i$. ✓

Trditev: Homogene koordinate so odvisne le od projektivnega ogrodja in ne od izbire vektorjev u_i.

Dokaz: Naj bodo $u_i' \in L_i \setminus 0$, $u_0' = u_1' + \dots + u_n'$.
Za vsak $i > 0$ obstaja $\lambda_i \neq 0$, da je $u_i = \lambda u_i'$
Torej: $u_0 = \lambda_0 u_0' = \lambda_0 (u_1' + \dots + u_n') = u_1 + \dots + u_n' = \lambda_1 u_1' + \dots + \lambda_n u_n' = \lambda_0 u_1' + \dots + \lambda_0 u_n'$
$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda_0$.
Zapišimo homogene koordinate za L glede na $\{u_1, \dots, u_n\}$ in $\{u_1', \dots, u_n'\}$.
$u \in L \setminus 0$: $u = \sum_1^n \alpha_i u_i$, $L = [\alpha_1 : \dots : \alpha_n]$
$u = \sum_1^n \beta_i u_i' \Rightarrow L = [\beta_1 : \dots : \beta_n]$
Ker je $\sum_1^n \alpha_i u_i = \sum_1^n \alpha_i \lambda_0 u_i'$ je $\alpha_i \lambda_0 = \beta_i$ $\forall i \Rightarrow [\alpha_1 : \dots : \alpha_n] = [\beta_1 : \dots : \beta_n]$.

Naj bo p projektivna premica in $\{C, A, B\}$ projektivno ogrodje za p. Izberemo $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$: $c = a + b$.
Za $D \in p$, $d \in D \setminus 0$ je $d = \alpha a + \beta b = [\alpha : \beta]$. Posebej $A = [1 : 0]$, $B = [0 : 1]$, $C = [1 : 1]$.
Za $D \neq A$: $\beta \neq 0$, zato je $D = [\alpha : \beta] = [\beta^{-1}\alpha : 1]$.

Definicija: Dvorazmerje A, B, C, D na projektivni premici p je število $\lambda = \mathcal{D}(A, B, C, D)$, da je $D = [\lambda : 1]$ v projektivnem ogrodju $\{C, A, B\}$

Trditev: Velja:
- $\mathcal{D}(B, A, C, D) = \mathcal{D}(A, B, C, D)^{-1}$
- $\mathcal{D}(B, A, C, D) = \mathcal{D}(B, A, D, C)^{-1}$
- $\mathcal{D}(D, B, C, A) = 1 - \mathcal{D}(A, B, C, D) = \mathcal{D}(A, C, B, D)$

Dokaz: Označimo $\lambda = \mathcal{D}(A, B, C, D)$. $\Rightarrow c = \overset{(*)}{a + b}$, $d = \overset{(**)}{\lambda a + b}$. To imamo
- $\mathcal{D}(B, A, C, D) = \lambda^{-1}$: Iščemo a', b', c', d', da velja: $c' = b' + a'$, $d' = \mu b' + a'$
  (*) $c = b + a \Rightarrow c' = c$, $a' = a$, $b' = b$.
  (**) $d = \lambda a + b = \lambda a' + b' = b' + \lambda a' \,/\lambda^{-1} \Rightarrow \lambda^{-1} d = \lambda^{-1} b' + a' = d' \Rightarrow \mu = \lambda^{-1}$.

$\Rightarrow \mathcal{D}(D,B,C,A) = 1-\lambda$: $\left.\begin{aligned} c' &= d'+b' \\ a' &= \mu d'+b' \end{aligned}\right\}$ Imamo to

$d = \lambda a + b = \lambda(c-b)+b = \lambda c + (1-\lambda)b \Rightarrow \lambda c = d + (\lambda-1)b$, $c' = \lambda c$, $d' = d$, $b' = (\lambda-1)b$.

$\lambda a = d - b \Rightarrow \lambda a = d' - (\lambda-1)^{-1}b' \;/\cdot -(\lambda-1)$

$\Rightarrow -\lambda(\lambda-1)a = -(\lambda-1)d' + b' \Rightarrow \mu = 1-\lambda = \mathcal{D}(D,B,C,A)$.

Ostalo podobno ■

Opomba: $\mathcal{D}(B,A,D,C) = \mathcal{D}(A,B,C,D) = \mathcal{D}(D,C,B,A)$

Izrek: Vsaka projektivnost ohranja dvorazmerje

Dokaz: Naj bo $\nu_M : p \to p'$ projektivnost med projektivnima premicama.
$A,B,C,D \in p$, označimo $\mathcal{D}(A,B,C,D) = \lambda$.

$c = a+b \xrightarrow{M} Mc = M(a+b) = Ma + Mb$

$d = \lambda a + b \qquad Md = M(\lambda a + b) = \lambda Ma + Mb$

$a \in A$, $Ma \in MA = \nu_M(A)$. Enako za ostale

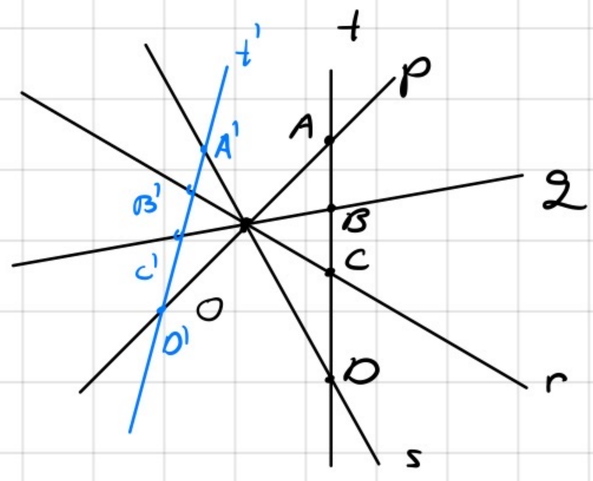
$\Rightarrow \lambda = \mathcal{D}(\nu_M A, \nu_M B, \nu_M C, \nu_M D)$.

Definicija: Naj bodo p,q,r,s različne projektivne premice v projektivni ravnini, ki gredo skozi skupno točko O. Izberemo poljubno premico t, ki ne gre skozi O. $(\text{ne } O, \mathcal{O})$

Označimo $A = p \cap t$, $B = q \cap t$, $C = r \cap t$, $D = s \cap t$. Dvorazmerje šopa premic je $\mathcal{D}(p,q,r,s) = \mathcal{D}(A,B,C,D)$

Definicija je dobra, saj je neodvisna od izbire premice t.

Če t' še ena premica, ki ne gre skozi O, obstaja perspektivnost $\nu : t \to t'$ s centrom v O, ki preslika A,B,C,D v preseke $A' = t' \cap p$, $B' = q \cap t'$, $C' = r \cap t'$, $D' = s \cap t'$, ta pa ohranja dvorazmerje po prejšnjem izreku.

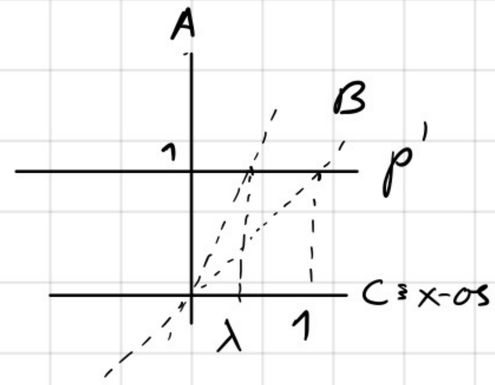


Od sedaj predpostavimo $1+1 \neq 0$.

Definicija: Točke A,B,C,D na projektivni premici tvorijo harmonično četverko, če je $\mathcal{D}(A,B,C,D) = -1$.

Izrek: Naj bodo A,B,C,D različne točke na projektivni premici p. Naj bo p' afina premica, vložena v p tako, da je C točka v neskončnosti. Točke A,B,C,D so harmonična četverka $\Leftrightarrow D$ je razpolovišče premice AB v p'.

(Kako izberemo projektivno ogrodje, da je C v neskončnosti? Zadnja homogena koordinata točke C mora biti 0. $\{\ldots, C, \ldots\} \Rightarrow C = [1,0]$.



Dokaz: $\{B,C,A\}$ projektivno ogrodje $\Rightarrow C = [1:0]$, $A = [0,1]$, $B = [1,1]$.

$D = [\lambda : 1]$ bo razpolovišče daljice AB v $p' \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

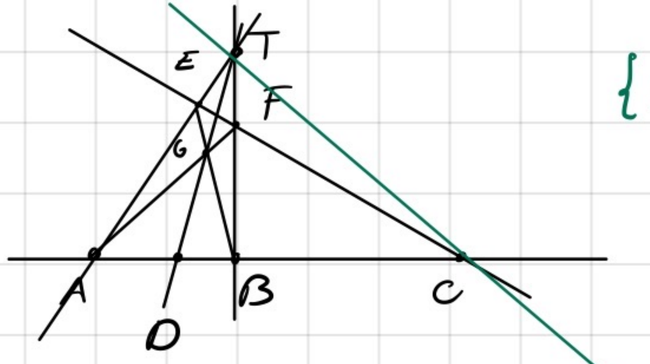
$\left.\begin{aligned} b &= c+a \\ d &= \lambda c + a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \mathcal{D}(C,A,B,D)$

$\mathcal{D}(A,B,C,D) = 1 - \mathcal{D}(A,C,B,D) = 1 - \lambda^{-1}$

A,B,C,D je harmonična četverka $\Leftrightarrow 1-\lambda^{-1} = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = \frac{1}{2}}}$.

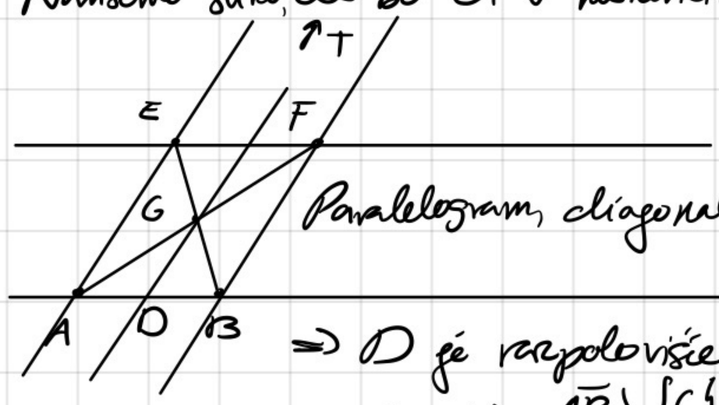
Izrek (Konstrukcija harmonične četverke): Naj bodo A,B,C različne točke na projektivni premici v projektivni ravnini. Naj bo g premica, ki gre skozi C in ne gre skozi A in B. Naj bo T točka, ki ne leži na zgornjih premicah. Označimo $\overline{TA} \cap g = E$, $\overline{TB} \cap g = F$, $\overline{EB} \cap \overline{FA} = G$ in $D = \overline{TG} \cap \overline{AB}$. Tedaj je A,B,C,D harmonična četverka.

Dokaz:



$\{\underline{A}, C, T, \underline{G}\}$ Npr. ?

Naris̆emo sliko, da bo $\overline{CT}$ v neskončnosti, da uporabimo izrek od prej



Paralelogram, diagonali se razpolavljata.

$\Rightarrow D$ je razpolovišče daljice $\overline{AB}$ v afini premici $\overline{AB} \setminus \{C\}$.

$\Rightarrow$ Po izreku, je A, B, C, D harmonična četverka. ∎

Trditev: Projektivnost $\nu: p \to p$ na projektivni premici p, ki ni identiteta, je involucija ($\nu^2 = id_p$) $\Leftrightarrow$ obstaja ta različni točki $A, B \in p$, da je $\nu(A) = B$, $\nu(B) = A$.

Dokaz: $\Rightarrow$: $\nu^2 = id$, $\nu \neq id$. Obstaja $A \in p$: $\nu(A) = B \neq A$, je pa $\nu(B) = \nu^2(A) = A$.

$\Leftarrow$: Naj bo $C \in p$, $C \neq A, B$ poljuben. Označimo $D = \nu(C)$, $E = \nu(D)$. Radi bi pokazali, da je $E = C$:

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = \mathcal{D}(\nu A, \nu B, \nu C, \nu D) = \mathcal{D}(\vec{B}, \vec{A}, \vec{D}, \vec{E}) = \mathcal{D}(A, B, E, D)$$

Iz tega sledi, da je $C = E$ (imata enake homogene koordinate).

Stožnice

Naj bo $V = \mathcal{O}^n$ vektorski prostor. Če je $p \in \mathcal{O}[x_1, \dots, x_n]$ polinom, množico ničel $\{(x_1, \dots, x_n) \in V,\ p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ imenujemo algebraična množica.
Če je p stopnje dva in $n = 2$, jo imenujemo stožnica.

Definicija: Polinom p je homogen, če obstaja $d \in \mathbb{N}_0$, da je $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d p(x_1, \dots, x_n)$.

Primer:
- $d = 0$: $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^0 p(x_1, \dots, x_n)$. $\Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) = p(0, 0 \dots 0)$ $(\lambda = 0)$.
- $d = 1$: $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda p(x_1, \dots, x_n)$. $p(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ za $\alpha_i \in \mathcal{O}$.
- $d = 2$: $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j$ za $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}$.
  $n = 3$: $p(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$

Homogen polinom ne definira preslikave $PV \to \mathcal{O}$, toda vseeno lahko definiramo množico ničel polinoma v PV. Množico ničel $\{[x_1 : \dots : x_n] \in PV;\ p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ imenujemo projektivna algebraična množica. Če je p homogen polinom stopnje 2 in $n = 3$, jo imenujemo stožnica. Torej je stožnica podana s kvadratno formo, torej homogen polinom stopnje 2. $q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$.

Označimo $M = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$, zato pa $q(v) = v^T M v$

Preslikava $\phi : V \times V \to \mathcal{O}$ je simetrična bilinearna forma na V, če je linearna v obeh faktorjih in, če je $\phi(x, y) = \phi(y, x)\ \forall x, y \in V$.
Naj bo $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza vektorskega prostora V $(n = 3)$ in označimo $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$. Tedaj $M = [a_{ij}]$ je simetrična matrika in tako $q(v) = v^T M v$ kvadratna forma. Če je $v \in V$ zapisan kot $v = x_1 e_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3$, je $\phi(v, v) = \phi\left(\sum_1^3 x_i e_i, \sum_1^3 x_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$.
Kako iz kvadratne forme q dobimo ϕ?

$\phi(u+v, u+v) = \phi(u, u) + 2\phi(u, v) + \phi(v, v)$ (char $\mathcal{O} \neq 2$)

$q(u+v) = q(u) + 2\phi(u, v) + q(v) \Rightarrow \phi(u, v) = 2^{-1}(q(u+v) - q(u) - q(v))$.

Torej lahko stožnico podamo na tri načine:
i) S kvadratno formo
ii) S simetrično matriko
iii) S simetrično bilinearno preslikavo.

Kvadratni formi $q_1, q_2 : V \to \mathcal{O}$ s pripadajočima matrikama sta ekvivalentni, če obstaja obrnljiva matrika S, da je $M_2 = S M_1 S^T$.
Stožnici S_1, S_2 sta ekvivalentni, če obstaja projektivnost $\varphi : PV \to PV$, da je $\varphi(S_1) = S_2$.

Trditev: Če sta q_1 in q_2 ekvivalentni kvadratni formi, sta pripadajoči stožnici S_1 in S_2 ekvivalentni.

Dokaz: $S_i = \{\mathcal{L}in\{u\};\ q_i(u) = 0\} = \{\mathcal{L}in\{u\};\ u^T M_i u = 0\}$

Obstaja obrnljiva matrika S, da je $M_2 = S M_1 S^T$.
S_1 ekvivalentno $S_2 \Leftrightarrow$ obstaja linearna preslikava A, da je $\varphi_A(S_1) = S_2$.

$\mathcal{L}in\{u\} \in \varphi_A(S_1) \Leftrightarrow \varphi_A^{-1}(\mathcal{L}in\{u\}) \in S_1$
$\Leftrightarrow \varphi_{A^{-1}}(\mathcal{L}in\{u\}) \in S_1 = \mathcal{L}in\{A^{-1}u\}$
$\Leftrightarrow (A^{-1}u)^T M_1 (A^{-1}u) = 0$.

$$\Leftrightarrow u^T \underbrace{(A^{-1})^T M_1 A^{-1}}_{M_2} u = 0$$

Za $A=(S^T)^{-1}$ dobimo, da je $Lin\{u\} \in S_2 \Leftrightarrow u^T M_2 u = 0 \Leftrightarrow u^T (A^{-1})^T M_1 A^{-1} u = 0 \Leftrightarrow Lin\{u\} \in v_A(S_1)$. ■

Sylvestrov izrek: Vsaka kvadratna forma $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je ekvivalentna neki kvadratni formi oblike
$q_{r,s}(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$.
Vsaka kvadratna forma $q: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ je ekvivalentna neki kvadratni formi oblike
$q_r(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Definicija: Stožnica je neizrojena, če je pripadajoča matrika maksimalnega ranga.

Klasifikacija stožnic za $\mathcal{O} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$\mathcal{O} = \mathbb{C}$

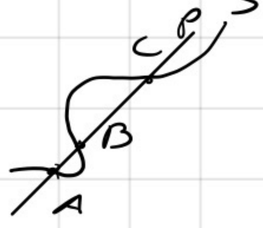
Rang M	Kvadratna forma	Stožnica
3	$x^2+y^2+z^2=0$	neizrojena stožnica
2	$x^2+y^2=0$	dve premici: $(x+yi)(x-yi)=0$
1	$x^2=0$	dvojna premica $x=0$.

$\mathcal{O} = \mathbb{R}$

Signatura (r,s)	Kvadratna forma	Stožnica
(3,0)	$x^2+y^2+z^2=0$	$\emptyset$ (ni projektivnih točk)
(2,1)	$x^2+y^2-z^2=0$	neprazna neizrojena stožnica. → Zanimivo, ostalo pa ne.
(2,0)	$x^2+y^2=0$	ena točka (z-os)
(1,1)	$x^2-y^2=0$	$y=\pm x$, dobimo dve premici
(1,0)	$x^2=0$	(dvojna) premica $x=0$.

Izrek: Presek neizrojene stožnice in projektivne premice vsebuje največ dve točki.
Če je $\mathcal{O}$ algebraično zaprt, je presek neprazen.

Dokaz: S naj bo neprazna neizrojena stožnica, p projektivna premica.



Denimo, da presek $S \cap p$ vsebuje točke A,B,C. $\{C,A,B\}$ je projektivno ogrodje za $p \Rightarrow c = a+b$.
Izberimo d projektivno točko $\mathcal{D}$ in $d \in \mathcal{D}$, da je $\{a,b,d\}$ baza za V.
Naj bo M matrika, ki pripada S v bazi $\{a,b,d\}$.

$$M = \Phi(d) = \begin{bmatrix} \phi(a,a) & \phi(a,b) & \phi(a,d) \\ \phi(b,a) & \phi(b,b) = \phi(d) & \phi(b,d) \\ \phi(d,a) & \phi(b,d) & \phi(d,d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$C \in S \Rightarrow c^T M c = 0$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \phi(d)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta+\gamma \end{bmatrix} = 2\alpha$$

$2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0. \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} M < 3$ ↯.

Naj bo $\mathcal{O}$ algebraično zaprt. Izberemo $A,B \in p \Rightarrow p = A \oplus B = Lin\{a,b\}$.
- $q(B) = 0 \Rightarrow B \in S \Rightarrow p \cap S \neq \emptyset$, smo končali. $p' = 1a + \lambda b + 0d$
- $q(B) \neq 0 \Rightarrow \forall P \in p \setminus \{b\}$ lahko zapišemo kot $P = [1:\lambda]$

Kot prej izberemo d, da je $\{a,b,d\}$ baza za V in M matrika za S v tej bazi. $p' \in P \in S \Leftrightarrow p'^T M p' = 0$

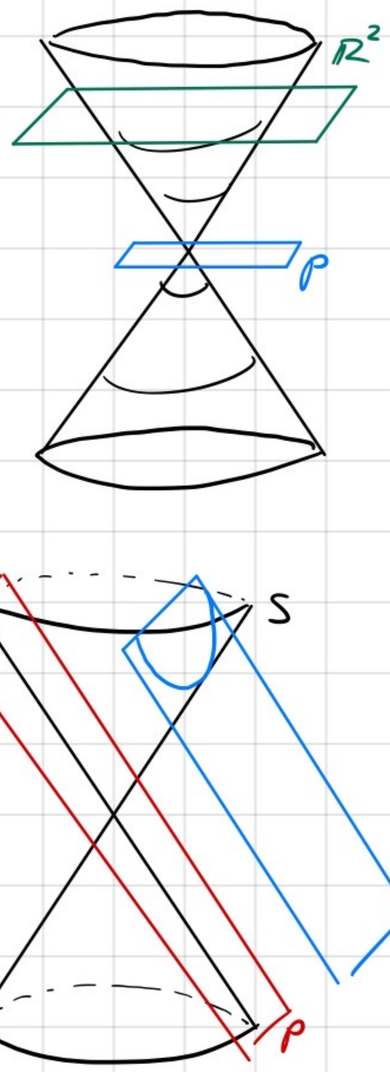
$$\begin{bmatrix} 1, \lambda, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$1 \cdot (m_{11} + \lambda m_{12}) + \lambda (m_{12} + \lambda m_{22}) = 0$$

$$\Rightarrow m_{22}\lambda^2 + 2m_{12}\lambda + m_{11} = 0$$

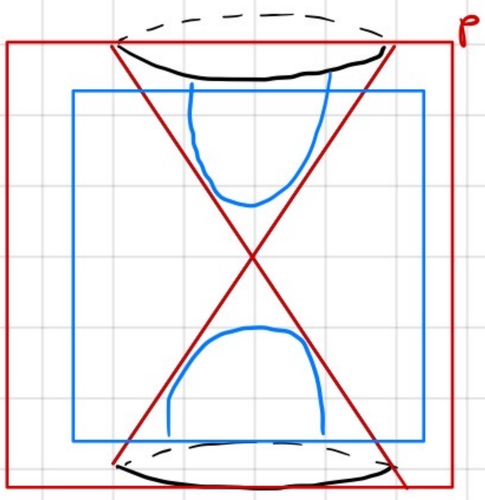
Enačba ima rešitev λ_0 in pripadajoča točka $Lin\{a+\lambda_0 b\}$ leži na S.

V realni projektivni ravnini je vsaka stožnica ekvivalentna stožnici s kvadratno formo $x^2+y^2=z^2$:



Če projektivna premica ne seka stožnice, potem vložena ravnina $\mathbb{R}^2$ v $P\mathbb{R}^3$ leži vzporedna s premico p, vsebuje celo stožnico.

Premica p seka stožnico v eni točki. Presek vložene afine ravnine, ki je vzporedna p s stožnico S je parabola.



Premica p seka stožnico v dveh točkah. Presek vložene ravnine, ki je vzporedna p s stožnico S je hiperbola.

Definicija: Tangenta na S v točki $A \in S$ je projektivna premica p, da je $p \cap S = \{A\}$.

Definicija: Naj bo $A = Lin\{a\} \in PV$ in S stožnica v PV. Množico točk $p_A = \{Lin\{b\} \mid \overset{a \perp b}{\phi(a,b)=0}\}$ imenujemo polara točke A glede na stožnico S.

Trditev: Če je S neprazna, nerazpadna stožnica, je p_A vedno projektivna premica.

Dokaz: Definiramo $\varphi_a : V \to \mathbb{R}$ s predpisom $\varphi_a(b) = \phi(a,b)$.
Tak φ_a je linearen funkcional in $p_A = \ker \varphi_a$.
Ker je $\dim \ker \varphi_a = \dim V - \dim \operatorname{im} \varphi_a = 3 - 1 = 2$.
$\hookrightarrow = 1$, saj ϕ nerazpadna
$\Rightarrow p_A$ je projektivna premica.

Trditev: Če je $A \in S$, S nerazpadna stožnica, je p_A tangenta na S v A.

Dokaz: $A = Lin\{a\} \in S \Leftrightarrow \phi(a,a) = 0 \Rightarrow A \in p_A$.
Naj bo B še ena točka v $S \cap (p_A \setminus \{A\})$. Izberimo $b \in B$, $b \neq 0$ in $c \in V$, da je $\{a,b,c\}$ baza za V.
Zapišemo M v bazi $\{a,b,c\}$, ki pripada S:

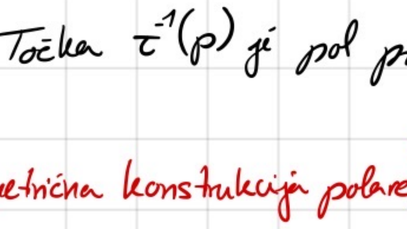
$$M = \begin{bmatrix} \phi(a,a)=0 & \phi(a,b)=0 & \phi(a,c) \\ \phi(b,a)=0 & \phi(b,b)=0 & \phi(b,c) \\ \phi(c,a) & \phi(c,b) & \phi(c,c) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow B \in p_A \\ \leftarrow B \in p_A \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sim \\ 0 & 0 & \sim \\ \sim & \sim & \sim \end{bmatrix}$$

Matrika M je rang $\leq 2 \Rightarrow S$ je izrojena $\Rightarrow \not\Leftrightarrow S \cap p_A = \{A\}$

Trditev: Za vsako $A \in S$, S neizrojena stožnica, obstaja natanko ena tangenta na S v A.

Dokaz: Naj bo p tangenta na S v A. $\Rightarrow p = Lin\{a, b\}$, $a \in A$.
Poljubna točka na $p \setminus \{A\}$ je oblike $p = Lin\{\lambda a + b\}$.
Ker $Lin\{\lambda a+b\} \notin S$, je $0 \neq \phi(\lambda a+b, \lambda a+b) = \lambda^2 \overset{0}{\phi(a,a)} + 2\lambda\phi(a,b) + \phi(b,b)$
$= 2\lambda\phi(a,b) + \phi(b,b)$
Če je $\phi(a,b) \neq 0$, potem za $\lambda = -\phi(a,b)\left(2\phi(a,b)\right)^{-1}$ dobimo, da je
$Lin\{\lambda a+b\} = 0 \Rightarrow Lin\{\lambda a+b\} \in S$.
$\Rightarrow \phi(a,b) = 0$. Iz tega dobimo $Lin\{b\} \in p_A$. Ker je tudi $A \in p_A$,
je premica $p = p_A$.

Velja: i) $A \in p_B \Leftrightarrow B \in p_A$.
Po def $A \in p_B \Leftrightarrow \phi(b,a) = 0 \Leftrightarrow \phi(a,b) = 0 \Leftrightarrow B \in p_A$.
ii) $A \neq B \Rightarrow p_A \neq p_B$.
Denimo, da $p_A = p_B$. $\forall X \in p_A = p_B \Rightarrow A, B \in p_X$. $\forall Y \in p_X \Rightarrow p_Y = p_A = p_B = XX'$.
$X \in p_Y$, $X' \in p_Y$



Naj bo $Z \in p_A \cap p_X \Rightarrow p_A = p_Z = p_X \Rightarrow AB = p_A = p_B$.
$\Rightarrow A \in p_A \Rightarrow A \in S \cap p_A \Rightarrow p_A$ je tangenta na $S \vee A$.
$\Rightarrow B \in p_B \Rightarrow B \in S \cap p_B \Rightarrow p_B$ je tangenta $S \vee B$
$\Rightarrow A = B$.

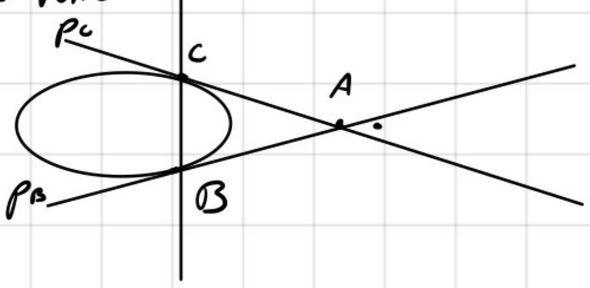
Trditev: Naj bo S neprazna, neizrojena stožnica. Tedaj je predpis $\tau: PV \to \{\text{projektivne premice v } PV\}$,
$A \mapsto p_A$, bijektivna.

Dokaz: Že vemo, da je τ injektivna.
Naj bo p projektivna premica in $A, B \in p$. Naj bo $C = p_A \cap p_B$.
Ker $A, B \in p_C \Rightarrow p = p_C$.

Definicija: Točka $\tau^{-1}(p)$ je pol projektivne premice glede na stožnico S.

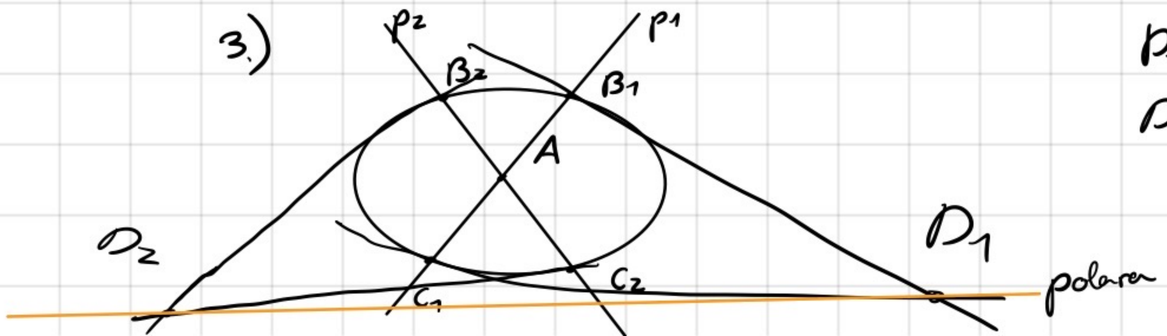
Izrek (Geometrična konstrukcija polare): Polaro točke A glede na neprazno neizrojeno stožnico S dobimo z eno izmed naslednjih konstrukcij:
1.) $A \in S \Rightarrow p_A$ je edina tangenta na $S \vee A$.
2.) $A \notin S$ in obstajata dve tangenti skozi A na S. Polara p_A je projektivna premica skozi dotikališči tangent.
3.) $A \notin S$ in ne obstaja tangenta na S skozi A. Izberimo premici p_1 in p_2 skozi A, ki sekata stožnico vsaka v dveh točkah.
Naj bo $S \cap p_i = \{B_i, C_i\}$. Naj bo D_i presek tangent na S v točkah B_i in C_i. Polara p_A je premica D_1D_2

Dokaz: 1.) Že vemo
2.)



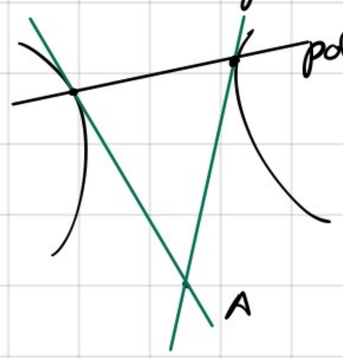
$A \in p_B, p_C \Rightarrow B, C \in p_A \Rightarrow p_A = BC$

3.)



$D_1 \in p_{B_1} = p_{C_1} \Rightarrow p_{B_1} = p_{C_1} = B_1C_1 = p_1 = p_{D_1}$
$D_2 \in p_{C_2} = p_{B_2} \Rightarrow p_{D_2} = B_2C_2 = p_2$
$\Rightarrow A \in p_1, p_2 \Rightarrow p_A = D_1D_2$

Primer: Naj bo S stožnica v $\mathbb{R}^2$, podana z enačbo $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$
Za $A(x_0,y_0)$ poišči vse premice, ki grejo skozi A in so tangente na S.



$p_A \cap S$ so točke, kjer obstaja tangenta na S, ki gre skozi A.

Če $\mathbb{R}^2$ vložimo v $P\mathbb{R}^3$ na nivo $z=1$, tj. $(x,y) \longmapsto [x:y:1]$.
Stožnica $\tilde{S}$ v $P\mathbb{R}^3$ za katero je $\tilde{S} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = S$, je podana s kvadratno formo $q(x,y,z) = ax^2+2bxy+cy^2+2dxz+2eyz+fz^2$.
Matrika za $\tilde{S}$ v standardni bazi:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Polara točke $[x_0:y_0:z_0]$ je $(x_0,y_0,z_0)M\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

$$\Rightarrow (x_0,y_0,z_0)\begin{bmatrix} ax+by+dz \\ bx+cy+ez \\ dx+ey+fz \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{axx_0+b(x_0y+xy_0)+cyy_0+d(x_0z+zx)+e(y_0z+yz_0)+fzz_0=0}$$

$$p_A = axx_0 + b(x_0y+xy_0) + cyy_0 + d(x_0+x) + e(x_0+x) + f = 0$$

Vedno oblika polare

Trditev: Naj bo S neprazna, nelinearna stožnica, $A \notin S$, projektivna premica r skozi A seka S v točkah C in D. Naj bo B $r \cap p_A$. Potem je A,B,C,D harmonična četverka.

Dokaz: Iščemo $\mathcal{D}(A,B,C,D) = \mathcal{D}(D,C,B,A) = \lambda = -1$?

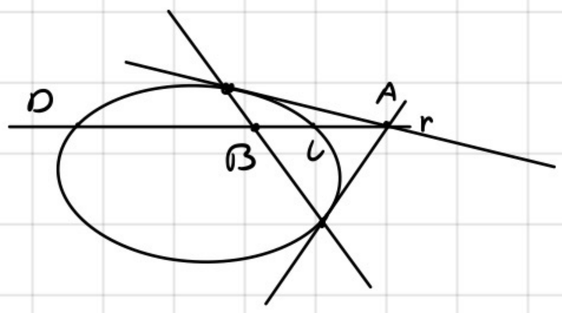
Izberemo $b = d+c$, $a = \lambda d + c$ in x, da je $\{c,d,x\}$ baza za V.
Matrika za S v tej bazi je

$$M = \begin{bmatrix} \phi(c,c) & \phi(c,d) & \phi(c,x) \\ \phi(d,c) & \phi(d,d) & \phi(d,x) \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \phi(c,d) & * \\ \phi(c,d) & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

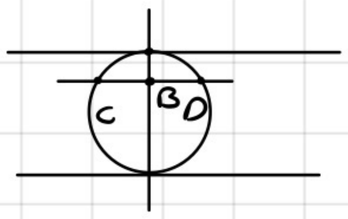
Ker je S neizrojena, je $\operatorname{rang} M = 3 \Rightarrow \phi(c,d) \neq 0$.
Ker $B \in p_A$, je $\phi(a,b) = 0$: $0 = \phi(a,b) = \phi(\lambda d+c, d+c) = \lambda \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\phi(d,d)}} + \lambda\phi(d,c) + \phi(c,d) + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\phi(c,c)}}$

$\Leftrightarrow \lambda\phi(c,d) = -\phi(c,d)$, $\phi(c,d) \neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda = -1$ ∎



$A \mapsto \infty \Rightarrow$

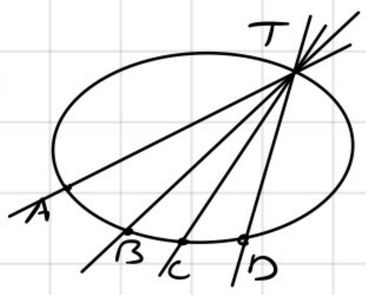


B med C in D, na polovici $\Rightarrow \mathcal{D}(D,C,A,B) = -1$.

Izrek (Steiner): Naj bodo A,B,C,D različne točke na neizrojeni stožnici S in $T \in S$ poljubna točka. Potem je $\mathcal{D}(\overline{TA}, \overline{TB}, \overline{TC}, \overline{TD})$ neodvisno od točke T.

Opomba: Če je $T = A$, je $\overline{TA}$ tangenta na S v točki A.
Enako za ostale.

Dokaz:



Ker premica seka neizrojeno stožnico v največ dveh točkah, nobena trojica izmed A,B,C,D ne leži na hiperravnini ($\equiv$ premici). Torej je $\{D,A,B,C\}$ projektivno ogrodje projektivne ravnine: $d = a+b+c$

Za $t \in T \setminus \{0\}$ je $t = xa+yb+zc$, saj je $\{a,b,c\}$ baza.

Matrika za S v bazi $\{a,b,c\}$: $M = \begin{bmatrix} \phi(a,a) & \phi(a,b) & \phi(a,c) \\ \phi(b,a) & \phi(b,b) & \phi(b,c) \\ \phi(c,a) & \phi(c,b) & \phi(c,c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$

Matrika M se spremeni, če vzamemo druge vektorje za a,b,c. Kako?

$d' = a' + b' + c' = \lambda d = \lambda a + \lambda b + \lambda c \Rightarrow a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c.$

$M' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha' & \beta' \\ \alpha' & 0 & \gamma' \\ \beta' & \gamma' & 0 \end{bmatrix}$, $\beta' = \phi(a',c') = \phi(\lambda a, \lambda c) = \lambda^2 \phi(a,c) = \lambda^2 \beta$

Enako tudi za ostale: $\alpha' = \lambda^2 \alpha,\ \gamma' = \lambda^2 \gamma.$

Opazimo, da $\frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\beta}{\gamma}$, kvocienti se ohranjajo torej.

Za točke D dobimo: $D = [1:1:1] \in S \Rightarrow (1,1,1) M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (1,1,1) \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+\gamma \\ \beta+\gamma \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \quad (\cdot \tfrac{1}{2})$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$

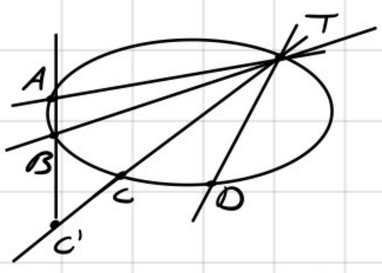
Za točke T dobimo: $[x:y:z] \Rightarrow (x,y,z) M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (x,y,z) \begin{bmatrix} \alpha y + \beta z \\ \alpha x + \gamma z \\ \beta x + \gamma y \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \alpha xy + \beta xz + \alpha xy + \gamma yz + \beta xz + \gamma yz = 0$

$\Rightarrow 2\alpha xy + 2\beta xz + 2\gamma yz = 0$

$\Rightarrow \alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$

1.) A,B,C,D,T različne točke:



Dvorazmerje šopa računamo na premici AB:

$A = [1:0:0] \quad B = [0:1:0]$

$C' = AB \cap CT \Rightarrow C' = [x:y:0] \qquad c' = *(x,y,z) + *(0,0,1)$

$D' = AB \cap DT \Rightarrow D' = [x-z:y-z:0]$

Če $x = 0$: $\Rightarrow B = [0:1:0],\ C = [0:0:1]$ in $T = [0:y:z]$ ležijo na isti premici

To bi pomenilo, da premica seka stožnico v 3 točkah, kar ni možno (največ 2)

$\Rightarrow x \neq 0$

Podobno vidimo, da je $y, z \neq 0$.

Če je $x = y$: $C = [0:0:1],\ D = [1:1:1],\ T = [x:x:z]$ so kolinearne, enako protislovje kot zgoraj

$\Rightarrow x \neq y$

Podobno dobimo $x \neq z$ in $y \neq z$.

$\mathcal{D}(A,B,C',D')$: $c' = \tilde{a} + \tilde{b} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$

$d' = \lambda \tilde{a} + \tilde{b}$

$\frac{y}{y-z} / \begin{bmatrix} x-z \\ y-z \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{x-z}{x} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{y-z}{y} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$, rabimo $x \neq 0, y \neq 0$ tukaj

$\Rightarrow \mathcal{D}(A,B,C',D') = \frac{x-z}{x} \cdot \frac{y}{y-z}$

Spomnimo se: $\begin{matrix} \alpha+\beta+\gamma=0 \ / xy \\ \alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0 \end{matrix}$ $\Big\}$ $\Rightarrow \beta(xz-xy) + \gamma(yz-xy) = 0$

$\Rightarrow \beta x(z-y) + \gamma y(z-x) = 0$

$\Rightarrow \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{y(z-x)}{x(z-y)} = -\frac{y(x-z)}{x(y-z)}$

$\Rightarrow \mathcal{D}(\overline{TA}, \overline{TB}, \overline{TC}, \overline{TD}) = \mathcal{D}(A,B,C',D') = -\frac{\beta}{\gamma}$. Neodvisno od T in izbire vektorja a,b,c.

2.) T je ena izmed točk A,B,C,D.

$\overline{BSS}$: $T = A$.

Dvorazmerje šopa računamo na premici BC:

$B = [0:1:0],\ C = [0:0:1]$

$D' = BC \cap AD = [0:1:1]$ $\quad AD \to \xi(1,0,0) - \xi(1,1,1)$ drugo in tretjo sta enaki

$A' = BC \cap p_A = [0:-\beta:\alpha]$

p_A: $(1,0,0) M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (1,0,0) \begin{bmatrix} \alpha y + \beta z \\ \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow p_z = \alpha y + \beta z = 0$

$\mathcal{D}(A',B,C,D')$: $\tilde{c} = a' + \tilde{b} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$

$d' = \lambda a' + \tilde{b}$

$$\begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix} = \underbrace{1}\begin{bmatrix}0\\ -\beta\\ \alpha\end{bmatrix} + \underbrace{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}\begin{bmatrix}0\\ \beta\\ 0\end{bmatrix} \quad / \cdot \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

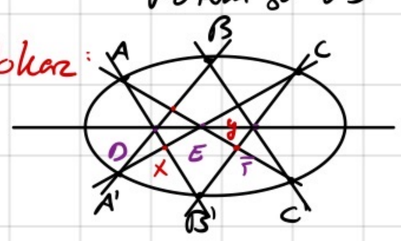
$$\Rightarrow \mathcal{D}(AA, AB, AC, AD) = \mathcal{D}(A', B, C, D') = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{-\gamma} \text{ iz } \alpha+\beta+\gamma = 0. \quad \blacksquare$$

Definicija: Naj bo S neprazna nerazpadna stožnica in $A, B, C, D \in S$ različne točke.
Dvorazmerje $\mathcal{D}(A,B,C,D) := \mathcal{D}(\bar{TA}, \bar{TB}, \bar{TC}, \bar{TD})$, kjer je $T \in S$ poljubna.
To je dobro definirano po Steinerjevem izreku.

Izrek (Pascal): Naj bodo A, B, C, A', B', C' različne točke na nerazpadni stožnici S.
Potem so $D = A'B \cap AB'$, $E = AC' \cap A'C$ in $F = B'C \cap BC'$ kolinearne.

→ Tudi v $\mathbb{R}^2$ velja, če obstajajo preseki

Dokaz:



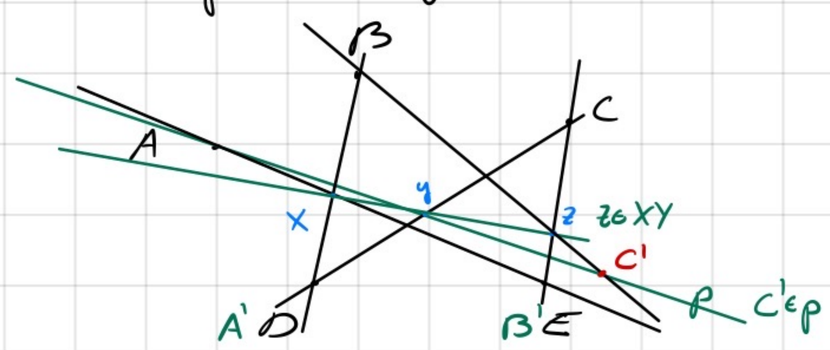
$$\mathcal{D}(A,B,C,B') \overset{\text{iz } S}{=} \mathcal{D}(A'A, A'B, A'C, A'B') \overset{AB'}{=} \mathcal{D}(A, D, X, B') = \mathcal{D}(\underbrace{EA}_{EA=EY}, ED, \underbrace{EX}_{EX=EC}, \underbrace{EB'})$$

$$\overset{\text{iz } S}{=} \mathcal{D}(C'A, C'B, C'C, C'B') \overset{CB'}{=} \mathcal{D}(Y, F, C, B') = \mathcal{D}(\underbrace{EY}, EF, \underbrace{EC}, \underbrace{EB'})$$

$\Rightarrow EF = ED$

$\Rightarrow D, E, F$ so kolinearne. $\blacksquare$

Naloga: Konstruiraj stožnico, ki gre skozi točke A, B, C, D, E.



$D \sim A'$
$E \sim B'$ iz Pascalovega izreka

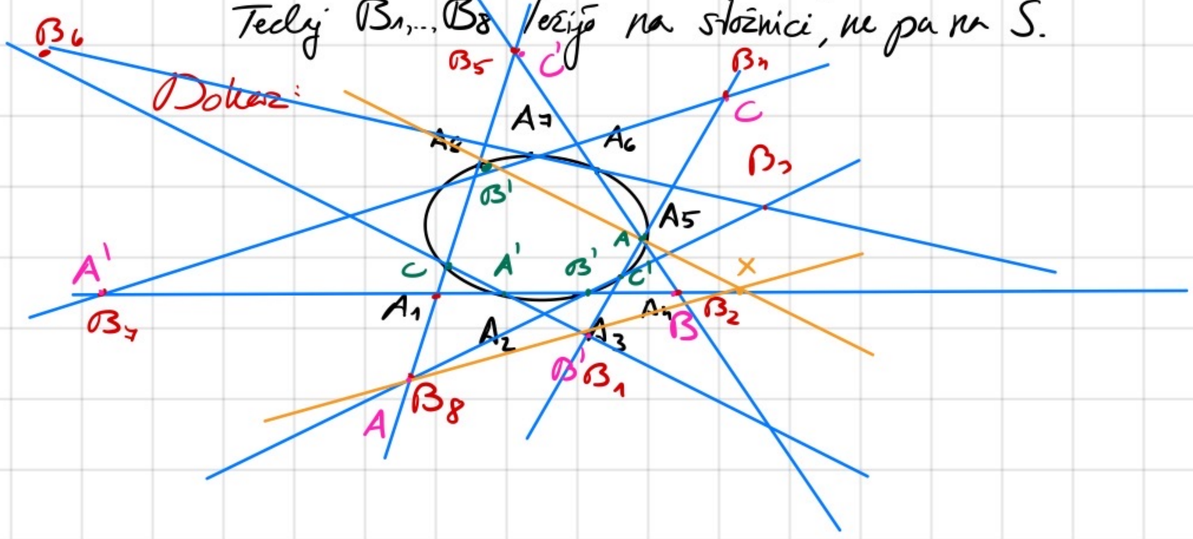
Skozi A narišemo premico p, ki negre skozi ostale točke. Iščemo presek p z iskano stožnico.
Konstruiramo X
Konstruiramo Y $(AC' = p)$
Z leži na premici XY (Pascalov izrek)
$Z = XY \cap CE$
$C' = p \cap BZ$

Obrat Pascalovega izreka (Braikenridge-Maclaurin izrek):
Naj bodo A, B, C, A', B', C' take točke v projektivni ravnini, da so $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ kolinearne. Potem točke A, B, C, A', B', C' ležijo na stožnici.

Skica dokaza: Naj bo S stožnica, ki gre skozi A, B, C, A', B'. Po prejšnji nalogi C' leži na S.

Izrek: Naj bodo $A_1, \dots, A_8$ točke na nerazpadni stožnici S in naj bodo $B_i = A_iA_{i+1} \cap A_{i+3}A_{i+4}$, indeksi mod 8.
Tedaj $B_1, \dots, B_8$ ležijo na stožnici, ne pa na S.

Dokaz:



Točke B_8, B_1 in $X = A_2A_3 \cap A_5A_8$ so kolinearne.
Označimo $A = A_5$, $B = A_3$, $C = A_1$, $A' = A_2$, $B' = A_8$, $C' = A_4$.
$\Rightarrow$ Točka X je $AB' \cap A'B$, $B_1 = AC' \cap A'C$, $B_8 = BC' \cap B'C$.
Po Pascalovem izreku: X, B_7, B_8 so kolinearne.
Označimo $A = B_8$, $B = B_2$, $C = B_4$, $A' = B_7$, $B' = B_1$, $C' = B_5$.
Potem $X = AB' \cap A'B$, $A_8 = AC' \cap A'C$ in $A_5 = BC' \cap B'C$ so kolinearne, s čimer smo zaključili.
Po obratu (B-L izrek) $\Rightarrow B_1, B_2, B_4, B_5, B_7, B_8$ ležijo na stožnici S_1.

Enako razmislimo, da $B_2, B_3, B_5, B_6, B_8, B_1$ ležijo na stožnici S_2.

– " – $B_4, B_5, B_7, B_8, B_2, B_3$ ležijo na stožnici S_3.

Ker velja: $B_2, B_4, B_5, B_7, B_8 \in S_1 \cap S_3$ ji $S_1 = S_3$ – 5 točk enolično določa stožnico.

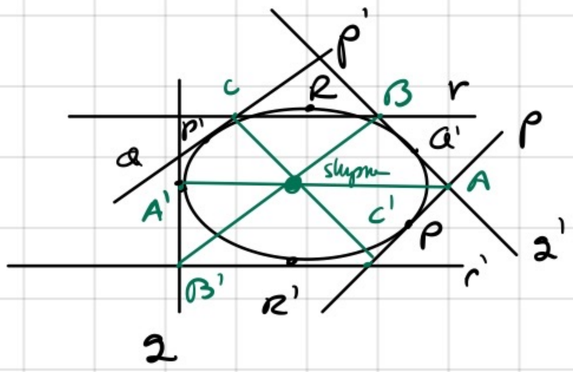
$\Rightarrow B_1 \in S_1, B_3 \in S_3 \Rightarrow$ Vsaj 7 točk leži na stožnici $S_1 = S_3$.

(Zavrtimo točke, podobno dobimo, da vse razen ene ležijo na skupni stožnici)

$S_2 \cap S_1$ vsebuje vsaj 5 točk $\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3$, vse točke so na vseh, so iste. ■

Brianchonov izrek: Naj bodo p, q, r, p', q', r' različne tangente na nerazrejeno stožnico. Označimo $A = p \cap q'$, $B = q' \cap r$, $C = r \cap p'$, $A' = p' \cap q$, $B' = q \cap r'$, $C' = r' \cap p$. Potem se premice AA', BB', CC' sekajo v skupni točki.

Dokaz:



Naj bo p tangenta na S v točkah $P, \dots, r'$ tangenta na S v R'.

Po Pascalovem izreku so točke $X = PQ' \cap P'Q$, $Y = PR' \cap P'R$ in $Z = QR' \cap Q'R$ kolinearne.

Premica PQ' je polara točke A, $P'Q = p_{A'}$. Ker $X \in p_A \cap p_{A'}$, A in A' ležita na p_X. $\Rightarrow p_X = AA'$.

Enako dobimo, da je $p_Y = CC'$ in $p_Z = BB'$. Označimo $T = AA' \cap BB' \Rightarrow T \in p_X \cap p_Z$

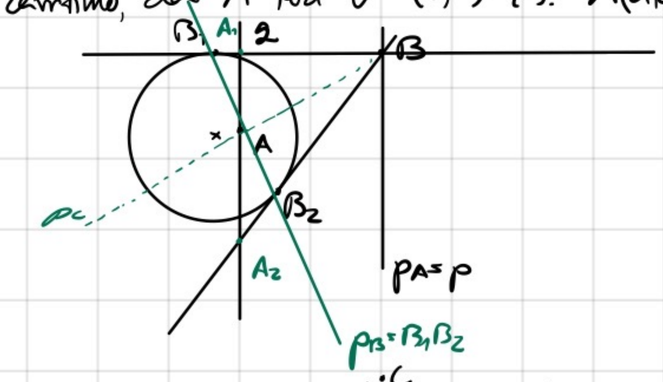
$\Rightarrow XZ = p_T$.

Označimo $S = AA' \cap CC' \Rightarrow XY$ je p_S, enako kot za T. Ker so X, Y, Z kolinearne, je $p_T = p_S$.

Zato $T = S$.

Naloga: Naj bo S^1 evklska krožnica v $\mathbb{R}^2$, A točka znotraj S^1, ki ni točka $(0,0)$. Naj bo p polara točke A glede na S^1 in naj bo $q \parallel p$, da je $A \in q$. Naj bo $B \notin p$ poljubna točka. Preseka tangent iz B na S^1 s premico q označimo z A_1 in A_2. Dokaži, da je A razpolovišče daljice A_1A_2.

Slika zavrtimo, da A leži v $(0,\infty) \times \{0\}$. $A(a,0) \Rightarrow p_A: x = \frac{1}{a}$



Označimo dotikališča tangent z B_1, B_2.

Velja: $p_B = B_1B_2$. Ker $B \in p_A \Rightarrow A \in p_B$.

Ločimo 2 primera: i) $C \in p_B = q$ ($\Rightarrow B$ leži na x-osi). $\Rightarrow A_1$ in A_2 sta si zrcalni sliki preko x-osi.

$\Rightarrow A$ razpolavlja daljico A_1A_2.

ii) $p_B \neq q$. Označimo $C = p \cap B_1B_2$, torej $C \in p_A \cap p_B \Rightarrow p_C = AB$.

$\mathcal{D}(B_1, B_2, A, C) = -1$ (konstrukcija harmonične četverke s pomočjo stožnice).

$\mathcal{D}(BB_1, BB_2, BA, BC) \overset{\text{kas.}}{=} \mathcal{D}(A_1, A_2, A, \infty) = \mathcal{D}(A_2, A_1, \infty, A) \Rightarrow A$ razpolovi A_2A_1.